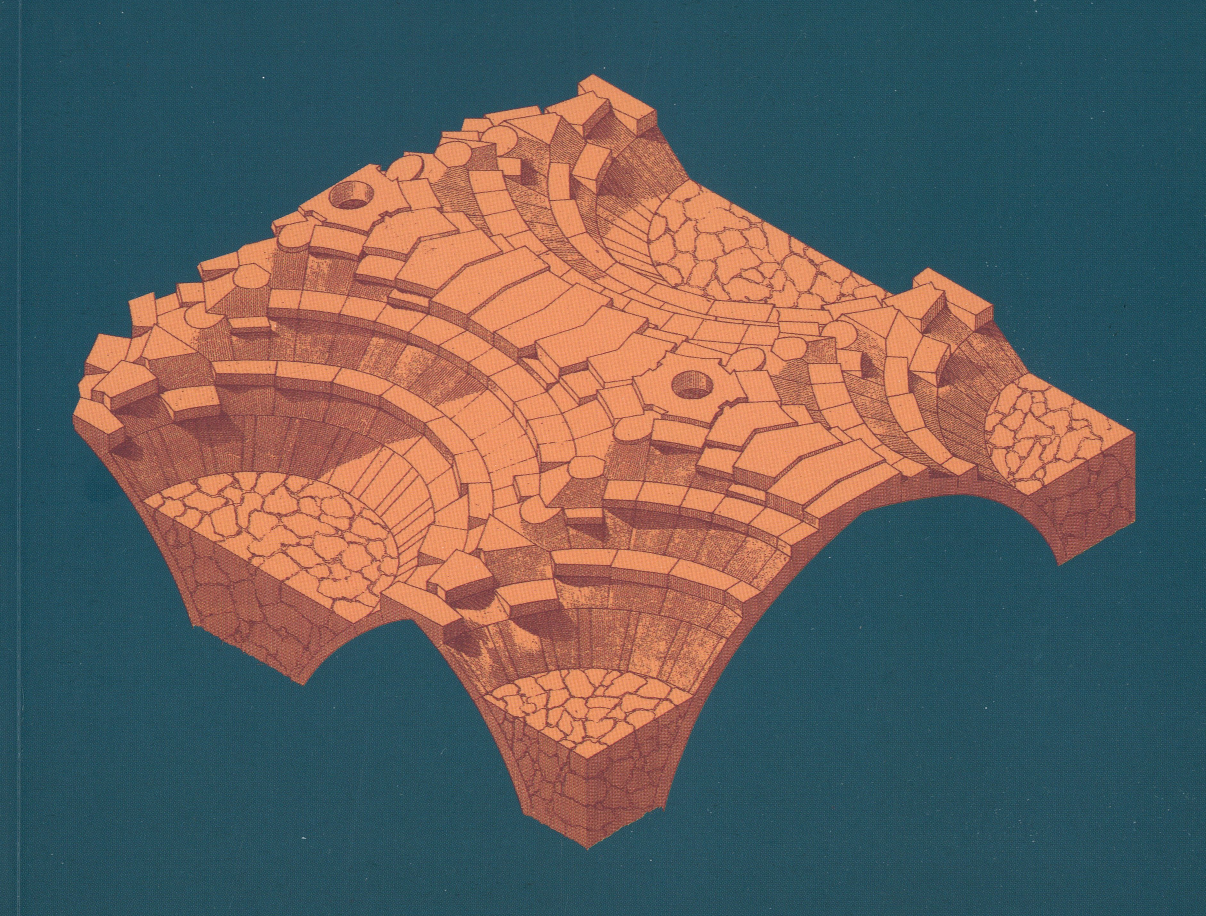
Equilibrio de cáscaras

Jacques Heyman



Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior
de Arquitectura de Madrid

El profesor Heyman es uno de los grandes teóricos de la Teoría de Estructuras y en los años 1940-50 contribuyó decisivamente al establecimiento de la Teoría Plástica de las estructuras de acero. En los años 1960, dirigió su atención a las estructuras de fábrica. Demostró que éstas también eran "plásticas" y que la teoría y los Teoremas Fundamentales podían traducirse a la fábrica. El profesor Heyman extrajo el principal corolario del Teorema de la Seguridad: el "enfoque del equilibrio". En este libro el profesor Heyman se centra en el equilibrio de las cáscaras. Expone primero la teoría de la membrana. Dentro del marco de la teoría plástica, el análisis de membrana es "seguro": la cáscara dúctil acomodará su estado de equilibrio para ajustarse a las incompatibilidades de deformación.

Las fuerzas de membrana pueden describirse con bastante precisión mediante las sencillas ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio de segundo orden. El libro se ocupa enteramente del equilibrio de las cáscaras, y la primera parte, de tres capítulos desarrolla las ecuaciones básicas de la membrana. La exposición se mantiene deliberadamente sencilla, abordando la geometría de las superficies de las cáscaras directamente, mediante ejemplos, en lugar de utilizar técnicas matemáticas poco conocidas.

En la segunda parte del libro, también de tres capítulos, se hacen dos rupturas con la teoría convencional de la membrana. En primer lugar, la geometría de la cáscara ya no se considera fija, sino que los dos límites de la cáscara definen una región en la que se busca una solución, y esta región puede contener superficies de cáscara con un comportamiento muy diferente de la cáscara de la superficie media convencional. En segundo lugar, se supone que el material no puede resistir las fuerzas de tracción. Las dos modificaciones surgen en el análisis de las estructuras de fábrica, y se dan ejemplos resueltos de la bóveda de crucería gótica, la bóveda de abanico y la aguja de piedra.

Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones
Colección dirigida por Santiago Huerta

A. Buchanan et al. (Eds.). **Robert Willis. Science, Technology and Architecture in the Nineteenth Century**
A. Choisy. **El arte de construir en Roma**
A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**
A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**
A. Choisy. **Historia de la arquitectura** (en preparación)
P. Fuentes e I. Wouters (Eds.). **Brick vaults and Beyond. Transformation of a historical structural system**
I. J. Gil Crespo (Ed.). **Historia, arquitectura y construcción fortificada**
J. Girón y S. Huerta (Eds.) **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**
R. Guastavino. **Escritos sobre la construcción cohesiva y su función en la arquitectura**
J. Heyman. **Análisis de estructuras: un estudio histórico**
J. Heyman. **El arco de fábrica**
J. Heyman. **El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica**
J. Heyman. **Equilibrio de cáscaras**
J. Heyman. **Geometry and Mechanics of Historic Structures**
J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**
J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**
J. Heyman. **Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. 2 vols.**
J. Heyman. **Vigas y pórticos**
S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica**
S. Huerta (Ed.). **Las bóvedas de Guastavino en América**
S. Huerta (Ed.). **History of the Theory of Structures. Essays in Honour of Jacques Heyman**
J. Ibáñez (Coord., Ed.). **Trazas, muestras y modelos de tradición gótica en la Península Ibérica entre los siglos XIII y XVI**
J. Ibáñez y B. Alonso. **El cimborrio en la arquitectura hispánica medieval y moderna**
J. M. Molero et al. (Eds.). **La construcción fortificada medieval**
J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas** (en preparación)
J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el siglo XVIII**
H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción** (en preparación)
G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**
H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**
A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**
E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**
R. Willis. **La construcción de las bóvedas en la Edad Media**



Equilibrio de cáscaras

Equilibrio de cáscaras

Jacques Heyman

traducción y prólogo de:
Santiago Huerta

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid

Edición y traducción íntegra del original:
J. Heyman. *Equilibrium of Shell Structures*.
Oxford: Oxford University Press, 1977.

ISBN: 978-84-9728-598-8
Depósito Legal: M-7383-2022
Cubierta: Bóveda del retrocoro de la Catedral de Peterborough. R. Willis. On the Construction of the Vaults of the Middle Ages. *Transactions of the Royal Institute of British Architects* 1, 1842: Plate 2.
Fotocomposición e impresión:
Gracel Asociados SLL
28018 Alcobendas
Distribución y venta: librosjuandeherrera.wordpress.com

Índice

Prólogo

Las cáscaras (también llamadas láminas o cascarones) son estructuras superficiales curvas. Si el espesor es menor que, digamos, 1/20 del radio de curvatura mínimo, se dice que son «delgadas». Muchas de las bóvedas de fábrica construidas desde hace siglos son cáscaras delgadas; algunas, muy delgadas. (Un espesor típico de las plementerías de las bóvedas góticas es ½ pie, para una luz típica de unos 10 m; la cúpula interior de la Basílica de los Desamparados de Valencia o la del crucero de la catedral de San Juan el Divino en Nueva York tienen una relación espesor/radio de curvatura de alrededor de 1/200.) Pero las cáscaras de fábrica no pueden mantener ese pequeño espesor en toda su extensión; a partir de una cierta altura de la coronación necesitan incrementar considerablemente su espesor, o disponer de elementos de contrarresto como muros radiales o rellenos de mampostería (también necesitan espesor cuando soportan una linterna). Esto es así porque la fábrica no resiste tracciones. Cuando a finales del siglo XIX se empiezan a construir cáscaras de hormigón armado fue posible mantener espesores muy pequeños en toda su extensión: el armado de acero permitía resistir las fuerzas internas de tracción.

En la segunda mitad del siglo XIX algunos ingenieros descubrieron que era posible encontrar una solución de equilibrio con todas las fuerzas internas sobre la superficie media esto es sin flexiones. La teoría correspondiente recibió el nombre de teoría de la membrana y se propusieron diversos métodos para encontrar las fuerzas internas de membrana, así como para dimensionar los elementos de borde (principalmente anillos o zunchos que trabajaban a tracción). Fue en el decenio de 1920 cuando se formuló con mayor generalidad la teoría de la membrana aplicada a cáscaras de cubierta.

Desde un principio se sabía que la solución de membrana conducía a incompatibilidades de deformación en los cambios bruscos de curvatura o en la unión de la cáscara con los elementos de borde, y que estas incompatibilidades producirían momentos flectores, que no son fuerzas de membrana. Se dedicó un importante esfuerzo de análisis para calcular estas llamadas «perturbaciones de borde». La obtención, realizando un análisis elástico, de estas fuerzas internas (principalmente momentos flectores) implicaba resolver ecuaciones diferenciales de equilibrio que podrían llegar sin dificultad al cuarto, incluso al octavo orden. Por tanto, se consideró que la teoría

de la membrana no era suficiente para analizar o proyectar cáscaras delgadas. Las ecuaciones diferenciales se resolvieron con gran trabajo; la aparición de los ordenadores permitió resolver numéricamente este problema y desde principio de los años 1980 los paquetes comerciales del Método los Elementos Finitos incluían el elemento «cáscara» que admitía flexiones elásticas (más tarde, también elasto-plásticas no-lineales) y permitía llegar a una solución que cumplía el objetivo de obtener el llamado «estado real» de fuerzas internas en la cáscara.

Sin embargo, desde los años 1920 y 1930, gracias al trabajo de John Baker, que dirigió la Comisión de Investigación de las Estructuras de Acero del Reino Unido en esos años, se sabía que la solución elástica puede no representar en absoluto el comportamiento de una estructura real. En los ensayos sobre pórticos de gran tamaño y edificios reales se observó que pequeñas imperfecciones de montaje o cambios en las condiciones de contorno producían variaciones enormes en los valores de las fuerzas internas. ¿Cuál era entonces el estado real de la estructura? Se descubrió que no hay un estado «real» fijo y permanente, que la estructura se acomoda a las imperfecciones y sobre todas a las variaciones de las condiciones de contorno. Por el contrario, la carga de colapso se podía calcular con gran precisión y era insensible a esos cambios en las condiciones de contorno. En una estructura hiperestática hay infinitas soluciones de equilibrio y parecía que la estructura era capaz de encontrar la que necesitaba en cada momento de su historia, aunque no estuviera prevista en el cálculo elástico. De hecho, esta intuición es lo que permitió trabajar a los arquitectos e ingenieros constructores que proyectaban sus estructuras para estar en equilibrio satisfactorio con las cargas cumpliendo los tres requisitos fundamentales de resistencia, rigidez y estabilidad, y tenían la convicción de que, finalmente, la estructura encontraría esa situación prevista u otra similar.

El problema del «estado real» de la estructura se resolvió con los Teoremas Fundamentales del cálculo plástico (o análisis límite), demostrados con generalidad hacia 1950. En particular, el Teorema de la Seguridad (o del límite inferior) garantiza que aquella intuición era completamente correcta. Si el analista proyecta la estructura para una cierta situación de equilibrio, la estructura es «segura», no se hundirá. Si la proyecta para con un cierto margen de seguridad, la estructura tendrá, al menos, esa seguridad. De madera antropomórfica podríamos decir que la estructura es tan inteligente como el calculista y, antes de hundirse, encontrará la solución prevista por el analista (u otra cualquiera que también sea segura).

Así, pues, el Teorema de la Seguridad tiene como corolario fundamental lo que el profesor Heyman llama «el enfoque del equilibrio». Se pueden calcular estructuras hechas con un material dúctil ignorando las ecuaciones de compatibilidad, esto es, sin necesidad de hacer afirmaciones de dudosa validez sobre las condiciones de contorno. Por otra parte, no tiene sentido hablar del estado «real» o «verdadero» de la estructura, pues este estado es, esencialmente, cambiante y hay una evidencia experimental abrumadora sobre este hecho.

Con referencia a las cáscaras: si la cáscara se calcula con la teoría de la membrana (una solución de equilibrio) y se disponen elementos de borde que permiten generar los fuerzas necesarias para mantener este equilibrio, esta solución es completamente segura. Las incompatibilidades de deformación se solventarán con pequeñas deformaciones y flexiones en esas zonas; es decir, las fuerzas internas se separarán ligeramente de la superficie media. La teoría de la membrana surge pues como una herramienta potente y segura de análisis y cálculo.

Algunos constructores de cáscaras se dieron cuenta de este hecho (antes de la formulación y difusión de los teoremas plásticos) y consiguieron una libertad extraordinaria en el proyecto de cáscaras. Este es el caso del arquitecto español Félix Candela que en los decenios de 1950 y 1960 asombró al mundo con sus combinaciones de equilibrio, principalmente de paraboloides hiperbólicos. En sus escritos Candela no cita explícitamente los teoremas fundamentales de la plasticidad, pero estaba completamente al tanto de los trabajos de Kazinczy, Johansen, Stüssi y otros teóricos centroeuropeos de la plasticidad (en particular del hormigón armado). Además, empleando el método de proyección de tensiones de Pucher consiguió simplificar extraordinariamente los cálculos de equilibrio. Candela unió sus sólidos conocimientos de la teoría estructural, con su intuición, y la capacidad práctica de construir modelos y cáscaras de ensayo gracias a su empresa constructora, Cubiertas Ala, que edificó centenares de cáscaras en México en esos decenios. Esto le permitió romper, de manera consciente, con la tiranía de los cálculos elásticos convencionales y trabajar exclusivamente con soluciones de equilibrio. Exigió, por supuesto, una extraordinaria dosis de pericia técnica a la hora de calcular los apoyos y elementos de borde que debían garantizar la existencia del estado de membrana.

Pero Candela fue una excepción y en sus escritos describe la enorme lucha que tuvo que librar con los ingenieros, sobre todo con los norteamericanos, que eran incapaces de abandonar el enfoque elástico y la fantasía de un estado real cognoscible. Los innumerables libros y artículos sobre teoría de cáscaras publicados en aquellos años, y llegando hasta la actualidad, sencillamente ignoran los grandes hallazgos de la teoría plástica y su principal corolario el enfoque del equilibrio. De hecho, durante el decenio de 1950, cuando se desarrolla la teoría plástica de pórticos de acero, esta teoría se centraba en el cálculo de estados de colapso (por ejemplo, el teorema de la seguridad se aplicaba para, obtenido un límite inferior de la carga, maximizarla hasta llegar a la carga de colapso). Sólo en los años 1960 el profesor Heyman (que formó parte del equipo de Baker y había contribuido de manera decisiva a la configuración de la teoría) llamó la atención sobre la posibilidad de calcular estructuras sólo con las ecuaciones de equilibrio y la condición de resistencia del material, sin tener que hacer afirmaciones dudosas, imposibles de verificar, sobre las condiciones de contorno. Aplicó su descubrimiento primero a los pórticos de acero, pero enseguida lo amplió a otros tipos de estructuras que presen-

tan un comportamiento dúctil: armaduras de madera (por ejemplo analizó la gran armadura de Westminster Hall) y sobre todo estructuras de fábrica. Es en este campo de las estructuras de fábrica en el que el profesor Heyman ha realizado una contribución tan importante que sería difícil imaginar su estado sin considerar su contribución crucial. La fábrica, de piedra, ladrillo u hormigón en masa, tiene un comportamiento dúctil y se pueden traducir los teoremas fundamentales de la plasticidad si se cumplen los tres principios plásticos (resistencia infinita a compresión, nula a tracción, fallo por deslizamiento imposible) que garantizan la ductilidad.

* * *

En este libro el profesor Heyman expone primero la teoría de la membrana, señalando cómo la expresión matemática de las ecuaciones ya conduce a observaciones cruciales sobre el comportamiento estructural. El estado de membrana conduce a grandes saltos en las fuerzas internas en los bruscos cambios de curvatura o en las zonas de contacto con los elementos de borde que garantizan la solución de equilibrio de membrana. Se producen, pues, incompatibilidades de deformación, las «perturbaciones» que llevaban decenios obsesionando a los proyectistas de cáscaras. Sin embargo, el profesor Heyman señala en este libro que, dentro de la teoría plástica estas incompatibilidades de deformación se pueden ignorar y de esta manera libera el análisis de la «camisa de fuerza de Navier», el apretado corsé de la teoría elástica que durante decenios obsesionó (y todavía lo hace) a los analistas de cáscaras. Dentro del marco de la teoría plástica, el analista puede ignorar los saltos en los cambios de curvatura y, si dispone unos elementos de borde (vigas, zunchos etc.) que garantizan las fuerzas necesarias para conseguir el equilibrio de membrana, la cáscara se deformará ligeramente y la superficie de tensiones se separa la ligeramente de la superficie media generando las flexiones locales necesarias, pero será segura.

En la segunda parte del libro se tratan las cáscaras de fábrica. El profesor Heyman tras explicar los principios generales con referencia al arco de fábrica, pasa a aplicarlos a cáscaras tridimensionales: agujas, bóvedas de abanico, cúpulas y bóvedas de crucería. Las tracciones son inadmisibles en estas cáscaras de fábrica y se buscan soluciones de equilibrio liberándose de la «tiranía» de la superficie media. Se busca el equilibrio, no sobre la superficie media, sino en una región delimitada por las superficies que definen la fábrica (el trasdós y el intradós). Del mismo modo que en un arco de fábrica de espesor suficiente se pueden trazar infinitas líneas de empujes, una cáscara de espesor finito puede contener infinitas superficies de empujes, que se separan de la superficie media. Si en estas superficies todas las tensiones son de compresión, la solución es admisible y segura. En las agujas de piedra, una superficie de empujes válida es la cáscara cónica inscrita en su espesor. En las bóvedas de abanico las soluciones de membrana, aunque pueden ser de compresión, generan empujes excesivos. Se invierte, entonces, el problema y se

buscan familias de superficies de empujes dentro del espesor de la cáscara. Finalmente, en el caso de la cúpula y de la bóveda de crucería, tras explorar las soluciones de membrana, se abandona la idea de superficies de empujes, y se buscan soluciones de equilibrio cortando la cáscara y dividiéndola en un cierto número de arcos elementales. Si cada arco cortado de esta forma está en equilibrio a compresión (contiene una línea de empujes con seguridad) la cáscara en su conjunto, aunque «rota» en estos arcos elementales, también lo estará. Este método de los cortes fue usado por primera vez por Poleni (1748) para verificar el equilibrio de la cúpula de San Pedro y se empleó rutinariamente a lo largo del siglo XIX. Este método se aplica en el último capítulo para analizar las bóvedas góticas de crucería. Estos métodos de equilibrio se consideraron en el siglo XIX como una aproximación burda (no eran análisis elásticos). El profesor Heyman demuestra que son completamente seguros. De hecho, el método de los cortes se convierte así en la herramienta fundamental para estudiar el equilibrio de cualquier estructura de fábrica.

En resumen, en este libro, el profesor Heyman guía al estudioso, al arquitecto o ingeniero, interesado en las cáscaras por el camino del equilibrio, empezando por las soluciones de membrana, justificando su empleo seguro en el cálculo (libre de la camisa de fuerza de Navier), para después, de manera sorprendente, liberar el análisis incluso de las ideas de continuidad proponiendo de manera radical el método de los cortes. Este libro ilumina todo el campo de estudio del equilibrio seguro de las cáscaras –de hormigón armado, de fábrica o de cualquier material dúctil– y permite una compresión de este equilibrio, imposible de alcanzar estudiando los manuales convencionales.

Madrid, 1 de marzo de 2022
Santiago Huerta

Prefacio

La teoría de cáscaras parece conducir en el mejor de los casos a la resolución de temibles ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, y los analistas, a poco que se les anime, llegan a producir ecuaciones de cuarto o incluso octavo orden en su intento de describir un problema físico dado. Sin embargo, las ecuaciones de segundo orden son en realidad suficientes para entender el comportamiento de la mayor parte de las cáscaras de la ingeniería civil y de la construcción, y resulta que la resolución de estas ecuaciones es con frecuencia completamente directa.

Esta sencillez se deriva del hecho de que las fuerzas en una cáscara delgada están, en cierto sentido, estáticamente determinadas; esto es, se pueden obtener sin hacer referencia a las propiedades elásticas (o plásticas) del material empleado. Este libro, en efecto, está completamente centrado en la *estática* de las estructuras de cáscara, y no se hace ningún intento de calcular las deformaciones. La primera parte, los tres primeros capítulos, desarrolla las ecuaciones básicas de membrana, y cubre un terreno bien conocido, pero de una forma que, se espera, no atemorice al estudiante que se encuentra con estas ecuaciones por primera vez. Algunas de las dificultades en la teoría de cáscaras surgen de la complicada geometría de las superficies en cuestión; la geometría de las cáscaras sencillas que se consideran aquí se trata de forma directa, y las potentes técnicas de coordenadas curvilíneas, mencionadas en el capítulo 2, no son precisas. Aplicaciones más amplias de la teoría requerirían el dominio de estas técnicas, pero la exposición en los capítulos 2 y 3 es razonablemente completa tanto para un curso básico como para las intenciones actuales.

En la segunda parte de este libro, también formada por tres capítulos, hay dos desviaciones sobre la teoría convencional de la membrana. En primer lugar la geometría de la cáscara no se considera fija; esto es, la solución de un problema en particular no se refiere a una determinada superficie de la cáscara. En vez de esto, se considera que los dos límites que definen la cáscara forman una *región* dentro de la cual se debe encontrar una solución, una región, además, que puede contener superficies de cáscara de comportamiento claramente diferente del convencional (es decir, de la superficie media) de la cáscara. En segundo lugar, el material se considera capaz de resistir compresiones pero incapaz de resistir fuerzas de tracción.

Estas dos modificaciones de la teoría de la membrana están ligadas y surgen del intento de comprender la estabilidad de los edificios de fábrica, y en particular de intentar analizar las fuerzas en, por ejemplo, una bóveda gótica de crucería, o una bóveda de abanico, o una aguja de piedra. Todas estas estructuras se estudian aquí; las soluciones no son sólo interesantes en sí mismas, sino que son ejemplos de la aplicación de la teoría plástica, originariamente deducida para materiales dúctiles tales como el acero. Las soluciones surgen de la aplicación del teorema del límite inferior de la teoría de la plasticidad, y están por tanto confortablemente del lado de la seguridad.

Algunos de los ejemplos suministrados aquí se estudian con cierto detalle mientras que en otros sólo se esbozan los resultados. En ambas partes del libro la preocupación se dirige a los tipos estructurales y a las técnicas de análisis más que a la solución detallada de problemas específicos.

Parte I
Teoría de la membrana

1
Introducción

La cáscara como membrana

Una cáscara es una estructura que puede ser idealizada matemáticamente como una superficie curva (como un arco puede ser idealizado en la teoría simple de estructuras por su línea media curva). Así, el espesor de la cáscara, que no tiene por qué ser constante de un punto a otro, se visualiza evidentemente como algo pequeño en comparación con las dimensiones principales de la cáscara. Una superficie curvada de este tipo, cuando es sometida a cargas externas (o a su propio peso), puede imaginarse como resistiendo la acción de esas cargas tanto por flexión de la superficie como por empujes (o tracciones) que actúan sobre la superficie. Este libro se ocupa exclusivamente de las fuerzas de *membrana*, que actúan en la superficie; se supone que los efectos debidos a la flexión son despreciables.

Una estructura bidimensional simple, libre de flexión, es la cadena flexible colgante, y es útil considerar el comportamiento de esta cadena, aunque parezca alejada de la de la cáscara rígida tridimensional, hecha quizás de hormigón, ladrillos y mortero, o de piedra. La cadena flexible, que cuelga bajo la acción de fuerzas aplicadas, adoptará una forma determinada: una catenaria, si la cadena está sometida únicamente a su propio peso, o una parábola si la carga está distribuida horizontalmente de manera uniforme. Cualquiera que sea la carga, habrá una forma correspondiente, y la acción estructural en todos los casos es la misma; las fuerzas puramente de tracción se transmiten a lo largo de la línea media de la cadena.

Como señaló Hooke en 1675 con su *ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* (del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido), una cadena colgante puede invertirse para dar un arco satisfactorio que soporte las mismas cargas, pero trabajando en compresión en lugar de a tracción. Sin embargo, un arco a compresión, si tiene un grosor insignificante, estaría en equilibrio inestable, y la estabilidad se confiere en la práctica haciendo que la rosca del arco tenga un espesor finito. Ahora bien, si las fuerzas puramente de compresión, sin flexión, han de transmitirse de una porción del arco a la siguiente (como se transmiten las fuerzas puramente de tracción en la cadena), entonces la línea media del arco sólo puede aceptar un único tipo de carga. Así, un arco parabólico sólo puede soportar una carga horizontal uniformemente distribuida (aunque la magnitud de la carga sea arbitraria). El espesor de la dovela en un arco real es lo que permite que el arco soporte rangos más amplios de carga; un gran número de arcos lineales idealizados pueden estar contenidos en un perfil práctico dado. De hecho, es de esperar que esto sea así, o ningún puente medieval habría sobrevivido a su descimbramiento. Este aspecto del comportamiento estructural se trata en la Parte II de este libro, y los arcos se analizan en el capítulo 4.

En contraste con la cadena flexible, el comportamiento de una membrana flexible colgante, hecha, supongamos, de tela, es completamente diferente. Una membrana de este tipo, con forma quizás de parte de una esfera, o de cualquier otra superficie no desarrollable, puede soportar una amplia gama de cargas diferentes sin alterar su forma básica (siempre que ninguna de las fuerzas de membrana sea de compresión). Del mismo modo, una cáscara delgada cupuliforme, hecha de material relativamente rígido, puede soportar una amplia gama de cargas puramente por la acción de las fuerzas en la superficie de la cáscara, es decir, sin flexión. Por lo tanto, la cáscara, a diferencia del arco, no tiene que construirse en la práctica con un espesor muy grande para acomodar diferentes cargas, aunque un cierto grosor mínimo (que suele ser muy pequeño) es necesario para evitar el pandeo local.

Un ejemplo doméstico conocido es el de la cáscara de un huevo de gallina, hecha de un material fino, rígido y frágil. La cáscara suele sobrevivir intacta hasta que la cascamos deliberadamente; un hombre normal es inca-

paz de romper un huevo normal entre el pulgar y el índice de la mano, aplicando presión a lo largo del eje de revolución. (Para romper la cáscara se requiere la aplicación de una gran presión local, proporcionada quizás por el pico del polluelo o por una cucharilla.) Además, la cáscara del huevo no se deforma visiblemente cuando se somete a una carga externa, y el hecho de que la curvatura de la cáscara cambie de forma insignificante implica que la carga induce tensiones de flexión despreciables. La presión entre el pulgar y el índice se transmite de un elemento de la cáscara al siguiente por la acción de las fuerzas de membrana.

Una cáscara de huevo intacta es, en un sentido técnico, completa; está limitada sólo por las dos superficies de la cáscara. Sin embargo, si se corta el huevo, se producirán dos cáscaras incompletas; las cáscaras incompletas tienen bordes. Como se verá, habrá que especificar las *condiciones de contorno* en los bordes de las cáscaras, y puede ser que algunas cáscaras incompletas sean sensibles a las condiciones precisas de sus bordes.

Ciertamente, y para seguir con el ejemplo del huevo consideremos un huevo pasado por agua, el comportamiento del huevo cuando se le quita la parte superior es visiblemente diferente al del huevo completo. Un huevo de gallina es una cáscara imperfecta de revolución, y normalmente no encaja perfectamente y «cojea» en una huevera fabricada a máquina. Sin embargo, al quitarle la parte superior, la cáscara incompleta puede sufrir pequeñas deformaciones de flexión que permiten que encaje bien en la copa (este ejemplo se debe a C. R. Calladine). Evidentemente, las condiciones precisas en el borde de una cáscara son importantes, y se verá que hay que prestar cierta atención a la especificación de la forma de apoyo de la cáscara en problemas más generales.

Órdenes de magnitud

Hasta ahora, la descripción y el análisis sobre las cáscaras se han centrado principalmente en su geometría; no se han mencionado las tensiones. Resulta que, para una amplia gama de cáscaras, este énfasis es correcto; es precisamente la geometría la que es significativa en la estimación de la capacidad de una cáscara para soportar un conjunto dado de cargas.

Como primer ejemplo, supongamos que una semiesfera delgada de espesor uniforme, Fig. 1.1, está sometida sólo a su propio peso,

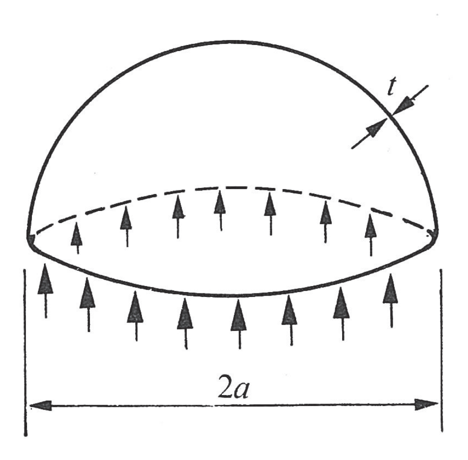


Fig. 1.1

y está soportada alrededor de su plano diametral horizontal por fuerzas que producen una tensión de compresión uniforme σ. Si la semiesfera tiene radio a y espesor t, y el material tiene peso específico ρ, entonces

$$\sigma(2\pi at) = \rho(2\pi a^2 t),$$

esto es

$$\sigma = \rho a. \qquad (1.1)$$

Por tanto, la tensión de compresión necesaria para soportar la cúpula tiene una magnitud independiente de su espesor.

Si el material de la cúpula es hormigón o fábrica, con un peso específico de, por ejemplo, 20 kN/m^3, y si la cúpula cubre una luz de, digamos, $2a$ = 100 m (la cúpula de San Pedro, en Roma, tiene una luz de 40 m), entonces ρa = 1 N/mm^2. La resistencia a compresión del hormigón, o de una piedra arenisca, podría ser de unos 40 N/mm^2; es evidente que, incluso para cúpulas muy grandes sometidas a su propio peso, el nivel de ten-

sión está muy lejos de la tensión límite del material, al menos en compresión. (Del cálculo de las fuerzas de tracción puede surgir una conclusión diferente. La fábrica y el hormigón, si estos son los materiales que se utilizan, son débiles a tracción; el cálculo de las tensiones principales de membrana permitirá evaluar el refuerzo de tracción necesario, para un proyecto satisfactorio.)

La tensión de compresión ρa de la ecuación (1.1) es típica del orden de magnitud de las tensiones en formas más generales de cáscara, aunque las expresiones analíticas para esas tensiones pueden ser mucho más complejas. Por tanto, la conclusión específica extraída del estudio de la semiesfera tiene una aplicación más amplia. Además, cabe esperar que las cargas aplicadas externamente sean como mucho iguales, y normalmente inferiores, a las cargas de peso propio de las cáscaras de un tamaño razonable. Por ejemplo, una cáscara de hormigón de 10 cm de grosor (se han construido cáscaras más finas de gran luz) tiene un peso por unidad de superficie de, digamos, 2.000 N/m²; una carga de nieve máxima típica podría ser de 1.500 N/m², con cargas de viento probablemente menores. Por lo tanto, es de esperar que las tensiones resultantes de la nieve o el viento sean del mismo orden que las resultantes del peso propio.

Los efectos relativos del peso propio y la sobrecarga dependen, por supuesto, del tamaño de la construcción. En lo que sigue se examinará brevemente una cáscara similar a la cúpula de San Pedro, si bien esta cúpula difícilmente puede clasificarse como una cáscara delgada. En la siguiente tabla se detallan tres cáscaras muy diferentes.

	Luz L (m)	Espesor t (mm)	L/t
San Pedro de Roma	40	3000	13
Huevo de gallina	0·04	0·4	100
Mercado de Smithfield	68	75	900

Tabla 1.1

El término cáscara delgada se aplica normalmente a las cáscaras para las que $(R/t)_{min} > 20$, y, en la práctica, las cáscaras delgadas pueden presentar una relación tan alta como 1.000 ó más. (Técnicamente es mejor utilizar el radio de curvatura mínimo R de la cáscara en lugar de la luz L para calcular la relación de espesor.)

Las cáscaras muy delgadas pueden correr el riesgo de pandear localmente. Este problema se plantea rara vez en casos de ingeniería civil o de la construcción con luces moderadas, pero puede ser importante si las luces son muy grandes. El pandeo local de una cáscara delgada se producirá a una tensión típica σ_{cr} cuando

$$\sigma_{cr} = k\, E\, \frac{t}{R}\,, \tag{1.2}$$

donde E es el módulo de Young. El valor de la constante k varía de un autor a otro, pero un valor razonable es aproximadamente 0,25. Así, para una cáscara de hormigón para la que E es de unos 20.000 N/mm², y con una relación t/R tan pequeña como 1/1.000, la tensión crítica valdría 5 N/mm². Por lo tanto, en el caso de cáscaras como la del mercado de Smithfield (Tabla 1.1), debería comprobarse (y de hecho se hizo) la posibilidad de pandeo; en Smithfield, las tensiones de compresión típicas en la mitad del vano son de unos 4 N/mm².

En lo que sigue no se harán más observaciones sobre los problemas de pandeo local.

Resultantes de tensiones de membrana

En el análisis convencional de membrana resulta conveniente trabajar, no en términos de tensiones σ, sino en términos de resultantes de tensiones N, donde $N = \sigma t$. Del mismo modo, las cargas de peso propio (y las sobrecargas) se especifican en términos de una carga w por unidad de superficie, de modo que la ecuación (1.1) puede reescribirse

$$N = wa\,. \tag{1.3}$$

Las resultantes de tensiones de membrana tienen dimensiones de fuerza por unidad de longitud; son las tensiones integradas a través del espesor de la cáscara, y el comportamiento matemático de las resultantes de tensiones es el mismo que el de las tensiones. Es decir, las resultantes de tensiones son componentes de un tensor de segundo orden.

Por tanto, si se imagina un corte infinitesimal en el espesor de la cáscara, las caras del corte estarán sometidas a una resultante de tensión normal y a una resultante de tensión de cortante, cuyos valores pueden relacionarse de la forma habitual (por ejemplo, mediante el círculo de Mohr) con los valores N_x, N_y y N_{xy} en los planos de referencia definidos por las direcciones de los ejes x e y. Se pueden calcular las resultantes de tensiones principales, y en el caso del hormigón armado, las tensiones de tracción deben ser absorbidas por la armadura de acero. El análisis permitirá el cálculo de dicha armadura, tanto en lo que respecta al tamaño como a la dirección de las barras.

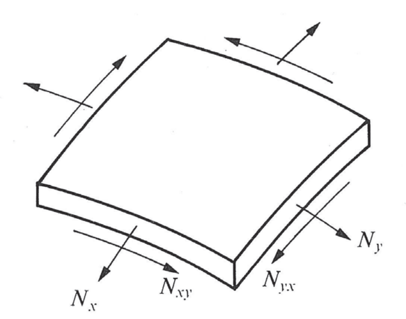


Fig. 1.2

La Fig. 1.2 muestra un pequeño elemento de cáscara sometido a la acción de las resultantes de tensiones de membrana. Los lados del elemento son paralelos a las direcciones x e y, y, como es habitual, $N_{xy} = N_{yx}$. Se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio para las tres resultantes de tensiones descomponiendo las fuerzas en las direcciones x e y, y también en la dirección perpendicular al elemento. Estas tres ecuaciones (que incluyen las componentes de la carga que actúa sobre el elemento de cáscara) contienen,

como se verá, derivadas parciales de las resultantes de tensiones. Aunque hay tres ecuaciones de equilibrio para tres incógnitas, todavía no hay garantía de que su solución sea única; como analogía, el momento flector único M en una viga recta sometida a una carga transversal w viene dado por

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w, \tag{1.4}$$

y M depende inicialmente de dos constantes arbitrarias de integración. Para encontrar los momentos de flexión reales en la viga, deben considerarse las condiciones de contorno; si dos de ellas son condiciones de contorno de fuerza, entonces la solución puede obtenerse sin hacer referencia a las propiedades del material de la viga (relación momento flector/curvatura), y la viga se denomina estáticamente determinada o isostática.

Del mismo modo, la integración de la ecuación de la cáscara conduce a funciones arbitrarias de integración, cuya forma debe ser determinada por las condiciones de contorno del problema particular. Los problemas que se tratan en este libro tienen soluciones que pueden obtenerse sin referencia a las propiedades elásticas (o plásticas) de la cáscara, por lo que también son estáticamente determinados. La solución para una geometría particular de la cáscara es, de hecho, un conjunto de resultantes de tensiones de membrana en equilibrio con la carga dada que actúa sobre la cáscara. Esta solución puede utilizarse para *proyectar* la cáscara, es decir, para asignar los espesores y proyectar los apoyos reales para que la cáscara sea, en la práctica, una estructura segura.

En los capítulos 2 y 3 se presentan soluciones para una amplia gama de cáscaras, pero las técnicas pueden ilustrarse aquí con dos ejemplos concretos.

Cascara esférica uniforme a peso propio

La esfera tiene una geometría simple que conduce a ecuaciones sencillas. La figura 1.3 muestra el meridiano de una esfera de radio a; los puntos a lo largo del meridiano se identifican por el ángulo φ, que es el complemento de la latitud utilizada en la geografía terrestre.

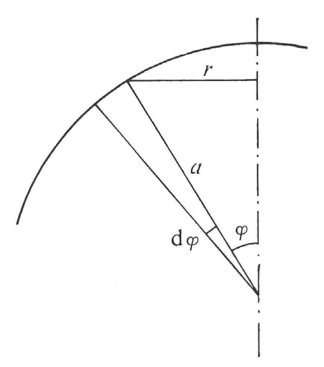


Fig. 1.3

Un punto sobre el meridiano dista r del eje vertical de la esfera; evidentemente

$$a \text{ sen}\,\varphi \;=\; r. \tag{1.5}$$

La ecuación (1.5) es típica de relaciones geométricas más generales que se mantienen para una cáscara general de revolución.

Aislaremos un pequeño elemento de la cáscara cortando por dos meridianos y dos círculos paralelos vecinos (Fig. 1.4); en el límite, se supone que el elemento es infinitesimal. El elemento puede ser identificado por la colatitud φ y por una segunda coordenada θ, la longitud (Fig. 1.5).

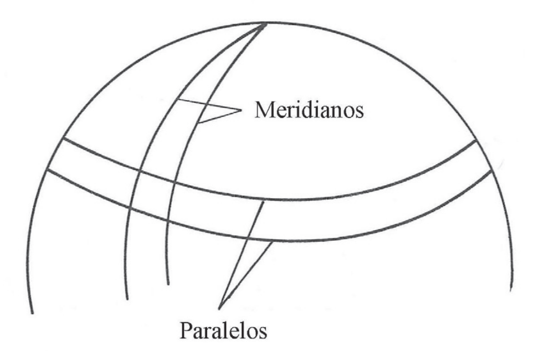


Fig. 1.4.

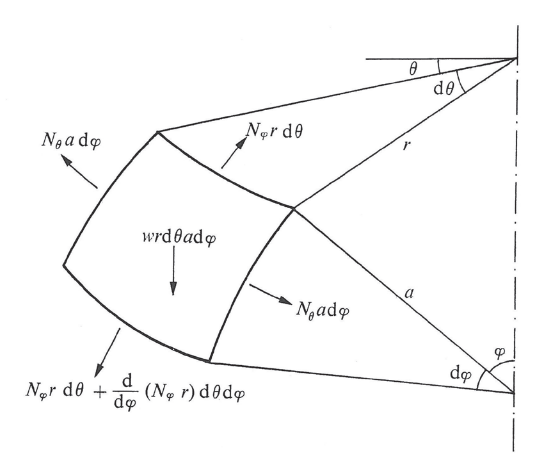


Fig. 1. 5.

La cáscara está sometida sólo a su peso propio uniforme w, de modo que el elemento soporta una carga vertical $wrd\theta ad\varphi$. Las resultantes de tensiones normales N_θ y N_φ. se muestran en la Fig. 1.5; para este problema particular de carga axisimétrica, la resultante de tensiones de cortante $N_{\varphi\theta}$ será cero en todas partes. En el borde superior cortado por el círculo paralelo la fuerza total que actúa tiene el valor $N_\varphi rd\theta$. Al aumentar φ en $d\varphi$, el valor de N_φ cambiará, al igual que el valor de r, y el aumento total de la fuerza en la dirección φ es, pues, $\frac{d}{d\varphi}$ $(N_\varphi r)\ d\theta d\varphi$.

Las dos fuerzas $N_\theta ad\varphi$ se encuentran en un plano horizontal (es decir, en el plano de una circunferencia paralela) y están inclinadas entre sí un ángulo $d\theta$; tienen por tanto una resultante de magnitud $N_\theta ad\varphi d\theta$. Esta resultante tiene una componente $N_\theta ad\varphi d\theta \operatorname{sen}\varphi$ normal al elemento y $N_\theta ad\varphi d\theta \cos\varphi$ en la dirección tangente al meridiano. Así, componiendo las fuerzas en esta dirección tangencial,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi\, r\right)\, d\theta\, d\varphi - \; N_\theta\; a\;\, d\varphi\;\, d\theta\;\, \cos\varphi \; = \; -war\; d\theta\;\, d\varphi \sin\varphi\;,$$

o, introduciendo $r = a$ senφ, ecuación (1.5),

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi \operatorname{sen}\varphi\,\right) - \; N_\theta \cos\varphi = \; -wa \operatorname{sen}^2\varphi\,. \tag{1.6}$$

La composición de fuerzas normales al elemento da

$$\left(N_\varphi\, r\, d\theta\right)\, d\varphi \;+\; N_\theta\, a\;\, d\varphi\;\, d\theta\;\, \operatorname{sen}\varphi \;=\; -war\, d\theta\;\, d\varphi \cos\varphi\;,$$

esto es
$$N_\varphi + N_\theta \;=\; -wa\;\cos\varphi\;. \tag{1.7}$$

La tercera ecuación posible, al componer las fuerzas en la dirección θ, da una identidad, y al dibujar la Fig. 1.5 ya se ha supuesto una distribución axisimétrica.

Las ecuaciones (1.6) y (1.7) contienen las dos resultantes de tensiones desconocidas N_θ y N_φ. La ecuación (1.7) es de una forma típica en la teoría de cáscaras, involucrando las resultantes de tensiones directamente, sin derivadas, mientras que la ecuación (1.6) es diferencial de primer orden. Si se elimina N_θ entre las dos ecuaciones

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi\, \operatorname{sen}\varphi\,\right) +\; N_\varphi \cos\varphi =\; -wa\;,$$

esto es
$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi\, \operatorname{sen}^2\varphi\,\right) =\; -wa$$

ó
$$N_\varphi = \frac{wa(\cos\varphi + C)}{\operatorname{sen}^2\varphi}\;, \tag{1.8}$$

donde C es una constante de integración.

Si la resultante de tensiones N_φ debe permanecer finita en la coronación, $\varphi = 0$, entonces, la constante C debe tener el valor -1, y se puede confirmar que con este valor N_φ tiende efectivamente a un límite finito para $\varphi = 0$; de hecho, la ecuación (1.8) se convierte en

$$N_\varphi =\; -\frac{wa}{1\;+\cos\;\varphi} \tag{1.9}$$

La condición de contorno de carga en la coronación que conduce al valor de la constante *C* puede introducirse de una manera diferente. Nótese que las direcciones θ y φ no pueden distinguirse en $\varphi = 0$, por lo que, a partir de la ecuación (1. 7)

$$[N_\varphi]_{\varphi=0} = [N_\theta]_{\varphi=0} = -\frac{1}{2}\,wa, \tag{1.10}$$

un resultado que queda confirmado por la ecuación (1.9).

Como alternativa, también se puede evitar la integración que llevó a la constante *C* considerando el equilibrio global de un casquete de la esfera, Fig. 1.6; si el peso del casquete es *W*, entonces

$$(N_\varphi)\,(2\pi r)\ \operatorname{sen}\varphi + W = 0, \tag{1.11}$$

y como

$$W = 2\pi\, wa^2(1 - \cos\varphi), \tag{1.12}$$

las ecuaciones (1.11) y (1.12) conducen directamente a la ecuación (1.9).

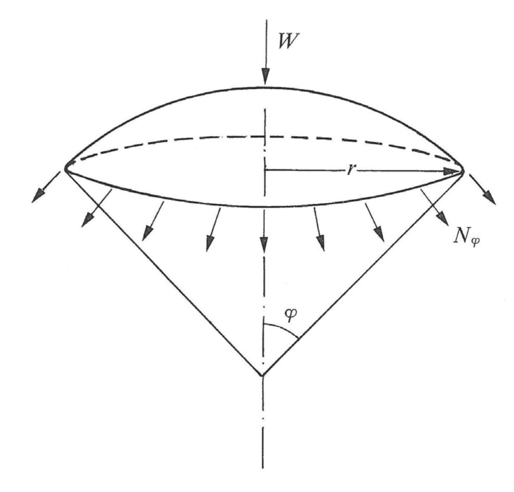


Fig. 1.6

Por lo tanto, la solución para la esfera bajo peso propio es

$$N_\varphi = -\frac{wa}{1 + \cos\varphi}$$
$$N_\theta = wa\left[\frac{1}{1 + \cos\varphi} - \cos\varphi\right]. \tag{1.13}$$

Estas resultantes de tensiones para el caso de una semiesfera se han representado en la Fig. 1.7. El valor de N_φ aumenta con φ desde un valor de compresión de −½ *wa* en la coronación hasta −*wa* á 90°; este último valor está de acuerdo con el resultado de la ecuación (1.3), (Fig. 1.1). Sin embargo, el valor de N_θ cambia de signo para φ =51,82°, lo que corresponde a la solución de la ecuación $\cos^2\varphi + \cos\varphi = 1$.

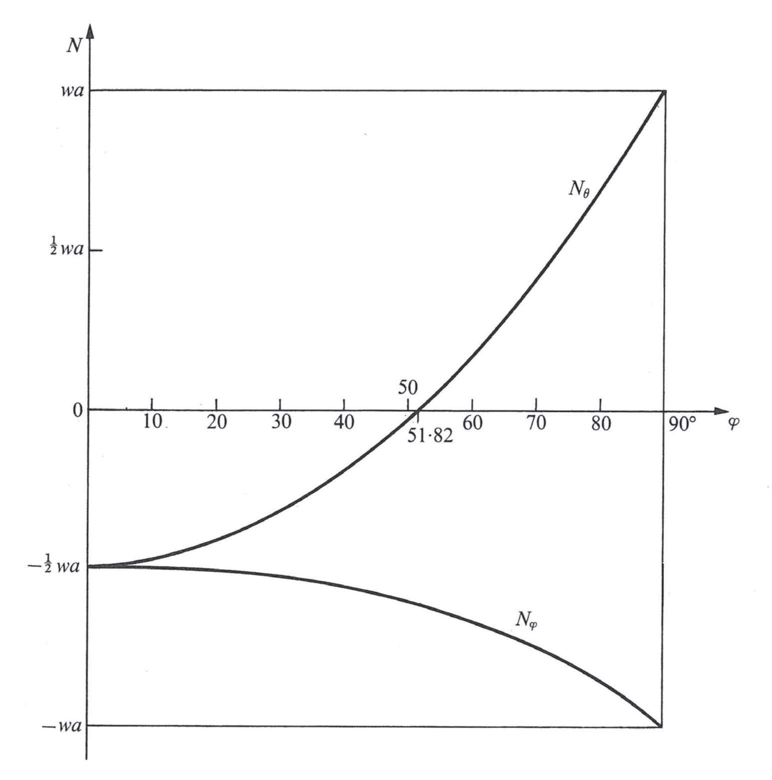


Fig. 1.7

Soporte exterior; refuerzos

Es importante darse cuenta de que, una vez que se asume la simetría axial, las resultantes de tensiones de las ecuaciones (1.13) quedan determinadas de forma única. Sólo hay un único valor de N_φ que satisface la ecuación de equilibrio (1.11); una vez determinado este valor, la ecuación (1.7) da inmediatamente el valor de N_θ. Por lo tanto, si la cáscara es incompleta (si, por ejemplo, es la semiesfera dibujada en la Fig. 1.1), entonces las condiciones de contorno de carga no pueden ser especificadas independientemente para el borde; más bien, el borde de la cáscara debe ser soportado por las fuerzas N_φ dictadas por la ecuación (1.13), si la solución de membrana ha de tener algún significado.

Todo el problema del apoyo de las cáscaras se discutirá con referencia a los ejemplos resueltos que se dan más adelante. Como ilustración, consideremos ahora el problema de una esfera completa sometida a su propio peso y que se apoya en un anillo continuo de soportes verticales a lo largo del plano diametral horizontal (Fig. 1.8).

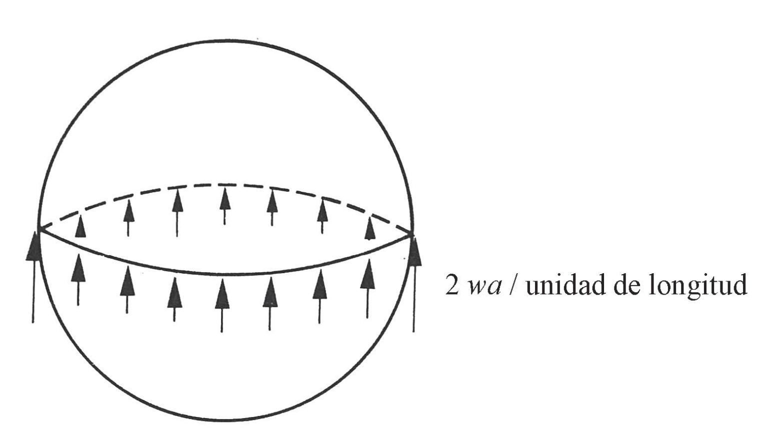


Fig. 1.8

Es de esperar que estos soportes produzcan una discontinuidad para $\varphi = 90°$ en el valor de N_φ, y la solución debe obtenerse en dos partes. Para la región $0 < \varphi < 90°$ las ecuaciones (1.13) se mantendrán, pero para la región $90° < \varphi < 180°$, se debe utilizar una constante diferente C en la ecuación (1.8).

A partir del argumento anterior de que el valor de N_φ debe permanecer finito, o por consideración directa del equilibrio de una porción de la esfera por debajo de la línea de apoyo, el valor de C se determina como +1, y las resultantes de tensiones para la región inferior son

$$N_\varphi = \frac{wa}{1-\cos\varphi},$$
$$N_\theta = -wa\left[\frac{1}{1-\cos\varphi} + \cos\varphi\right]. \tag{1.14}$$

Por supuesto, las ecuaciones (1.14) no son más que las ecuaciones (1.13) con los signos cambiados y con φ sustituido por $\pi - \varphi$; la cúpula semiesférica de la Fig. 1.1 se ha invertido formando un cuenco colgante semiesférico.

A partir de las ecuaciones (1.13) y (1.14) se verá que el valor de N_φ salta una cantidad $2wa$ (de $-wa$ á $+wa$) en $\varphi = 90°$; el peso total de la esfera, $4\pi wa^2$, se distribuye alrededor del anillo circunferencial de longitud $2\pi a$, y la reacción señalada en la Fig. 1.8, concuerda con el análisis de la cáscara. El valor de N_θ también salta en una cantidad $2wa$, como debe ser a partir de la ecuación (1.7), ya que $N_\varphi + N_\theta = 0$ para $\varphi = 90°$; las resultantes de tensiones se distribuyen como se muestra en la Fig. 1.9.

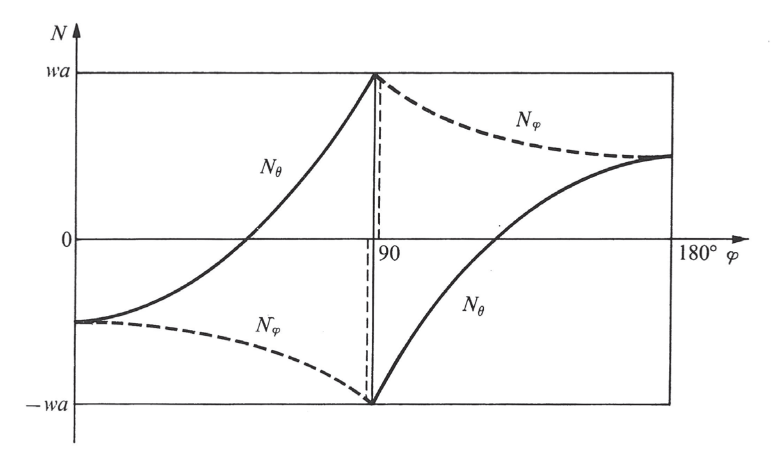


Fig. 1.9

Por tanto, la tensión anular es de tracción justo por encima del soporte y de compresión justo por debajo y, para un material elástico, habrá evidentemente cierta incompatibilidad de deformaciones en esta región. Este es un ejemplo de una anomalía más general y que es recurrente en la teoría de membrana de las cáscaras; la suposición de que se puede despreciar la flexión conduce a conjuntos de fuerzas que ciertamente satisfacen el equilibrio, pero que no se pueden hacer encajar con un patrón simple correspondiente de deformación. Este punto se trata con detalle más adelante; en la práctica, *se producirá* una cierta flexión en la cáscara para mantener la compatibilidad de la deformación.

Se observó que, para la semiesfera descrita por las ecuaciones (1.13) y la Fig. 1.7, la tensión anular N_θ cambiaba de signo en $\varphi = 51{,}82°$, y que era de tracción desde ese valor hasta el apoyo en $\varphi = 90°$. Las implicaciones de esto se discuten más adelante en el capítulo 5, pero parece que si el material de la cáscara es hormigón armado, el proyectista debe proporcionar un refuerzo a tracción; si el material es fábrica, algunos tirantes envolventes deben formar parte de la estructura, y un solo tirante en la base no será suficiente. Más bien hay que prever una banda de tirantes para $51{,}82° < \varphi < 90°$; en la práctica, se utilizará un número discreto (Wren previó tres tirantes en la catedral de San Pablo, aunque una de las cúpulas de ladrillo que reforzaba no era esférica sino cónica).

Para una cáscara de hormigón (y, de hecho, también para una cáscara de fábrica) existe la posibilidad de pretensar estos tirantes circunferenciales. Supongamos que uno de estos tirantes se coloca de forma que quede incluido en el casquete de la Fig. 1.6; la ecuación (1.11) seguirá siendo válida, y la resultante de tensiones de compresión N_φ en el hormigón seguirá estando dada por la ecuación (1.9). Si ahora el elemento de la Fig. 1.5 se redibuja como el elemento pequeño pero *finito* de la Fig. 1.10, que incluye el tirante considerado, entonces la ecuación (1.7) sigue siendo aproximadamente correcta; sin embargo, la resultante de tensiones N_θ se sustituye por la suma de las fuerzas aportadas por el tirante y el hormigón juntos. Así, a partir de la Fig. 1.10, si la fuerza del tirante es T y la resultante de tensiones del hormigón es $N_{\theta c}$, entonces

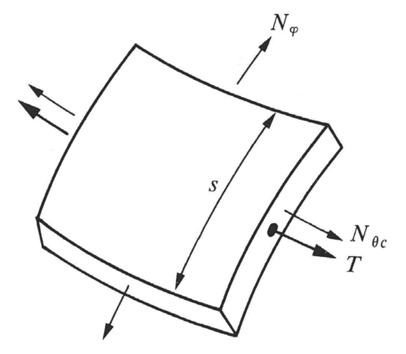


Fig. 1.10.

$$N_{\theta c} + \frac{T}{s} = N_\theta \,, \qquad (1.15)$$

donde N_θ viene dada por la segunda de las ecuaciones (1.13).

La ecuación (1.15) supone que el valor de $N_{\theta c}$ permanece constante a lo largo de una distancia razonablemente pequeña pero finita s; en la práctica, s se tomaría como la distancia entre los tendones de pretensado (o las barras de armado), siempre que estos estuvieran razonablemente cerca. De hecho, $N_{\theta c}$ no será constante a lo largo de la distancia finita s; teóricamente, la geometría fija de la cáscara obligaría a que $N_{\theta c}$ tuviera el valor N_θ en todas partes, excepto en la vecindad inmediata de la armadura. En la práctica, el grosor finito de la cáscara, por un lado, y una ligera flexibilidad, por otro, permitirán que la resultante de tensiones del hormigón se «extienda»; la «superficie de membrana» puede apartarse ligeramente de la «superficie media», permitiendo así un ligero cambio de geometría.

Como ejemplo numérico, consideremos una cúpula semiesférica de 40 m de luz, de hormigón armado y de 10 cm de espesor. Así, si suponemos w = 2.000 N/m², la resultante de tensiones de tracción máxima N_θ tiene un valor wa = (2000)(20) = 40.000 N/m. Una barra de acero de 10 mm de diámetro que trabaje a 125 N/mm² resiste unos 10.000 N, por lo que cuatro barras de este tipo por metro cerca de la base, con una separación más am-

plia hacia arriba, proporcionarían teóricamente un refuerzo adecuado. Este armado ligero no incluye la sobrecarga, pero de estos cálculos tan sencillos se desprende que el refuerzo a tracción es perfectamente factible y que su cálculo es sencillo.

Si las mismas barras de acero, con una separación de 25 cm, se sustituyeran por tendones de pretensado tensados a 10 kN cada uno, se induciría una resultante de tensiones de compresión inicial en la cáscara de 40 kN/m. Todas las grietas meridianas podrían cerrarse con estas fuerzas en los tendones, que podrían aumentarse aún más para evitar posteriores grietas bajo la sobrecarga. Sin embargo, la provisión de tendones de pretensado es, en la práctica, mucho más difícil que la colocación de una armadura simple.

Es interesante saber que las cúpulas semiesféricas presentan ciertamente grietas cerca de sus apoyos; una de las más famosas es la cúpula de San Pedro, en Roma, de la que informaron los *tre mattematici*[1] en 1743 y de nuevo Poleni en l748.[2] El análisis de Poleni se mencionará más adelante en el capítulo 5; Poleni llegó a la conclusión de que, a pesar de las grietas, la cúpula se mantendría en pie sin ayuda, pero también abogó por el uso de tirantes de hierro circundantes.

Cúpulas esféricas incompletas

La semiesfera es una forma improbable en la práctica moderna del hormigón armado; si se utilizara una cáscara esférica, sería como un casquete y no como una semiesfera. Por ejemplo, la Fig. 1.11 muestra un casquete de radio 40 m con la misma luz de 40 m que el ejemplo numérico anterior; la resultante de tensiones máxima de compresión en la coronación (½ *wa*) se duplica en comparación con la semiesfera, pasando de 20 kN/m á 40 kN/m. Sin embargo, en contraste con la semiesfera, no se desarrollaría ninguna tracción en la cáscara de la Fig. 1.11 cuando se somete a su propio peso.

---

1 T. Le Seur, F. Jacquier y R. G. Boscovich. *Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S.Pietro sul fine dell'Anno 1742*. Roma: 1743.

2 G. Poleni. *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: 1748.

Evidentemente, debe estar soportada en su borde por fuerzas horizontales y verticales para que pueda desarrollarse la resultante de tensiones de compresión N_φ (véase la figura 1.6); en la práctica, podría preverse una viga anular con armadura de tracción.

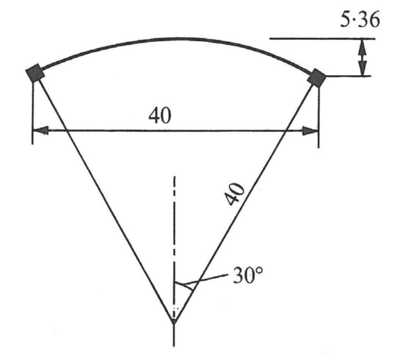


Fig. 1.11

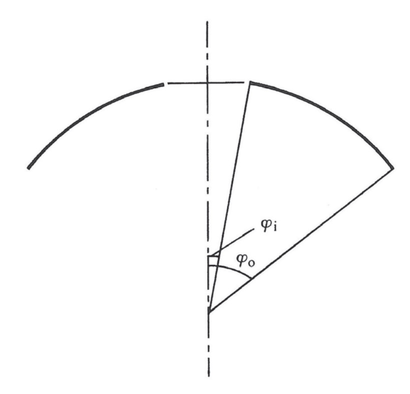


Fig. 1.12

Una cúpula con un «óculo» es una forma estructural perfectamente satisfactoria. Mientras que un arco bidimensional requiere la colocación de la clave antes de poder realizar el descimbrado, una cúpula puede estar completamente abierta en la coronación (Fig. 1.12); con cierto cuidado, se puede construir una cúpula de fábrica, de piedra o de ladrillo, prácticamente sin cimbra. La cúpula esférica de la Fig. 1.12 está contenida entre los

ángulos φ_i y φ_0. La constante C de la ecuación (1.8) se determina a partir de la condición de que N_φ sea cero para $\varphi = \varphi_i$, de modo que

$$N_\varphi = -wa\,\frac{(\cos\varphi_i - \cos\varphi)}{\operatorname{sen}^2\varphi}\,; \tag{1.16}$$

el valor de N_θ viene dado entonces, como antes, por la ecuación (1.7). La ecuación (1.16) y el valor correspondiente de N_θ se representan en la Fig. 1.13 para $\varphi_i = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}1)$, para el que $\cos\varphi_i = 0{,}995$. Para valores de φ superiores a unos 30° se verá que los valores de las resultantes de las tensiones son prácticamente indistinguibles de los de la esfera completa (Fig. 1.7).

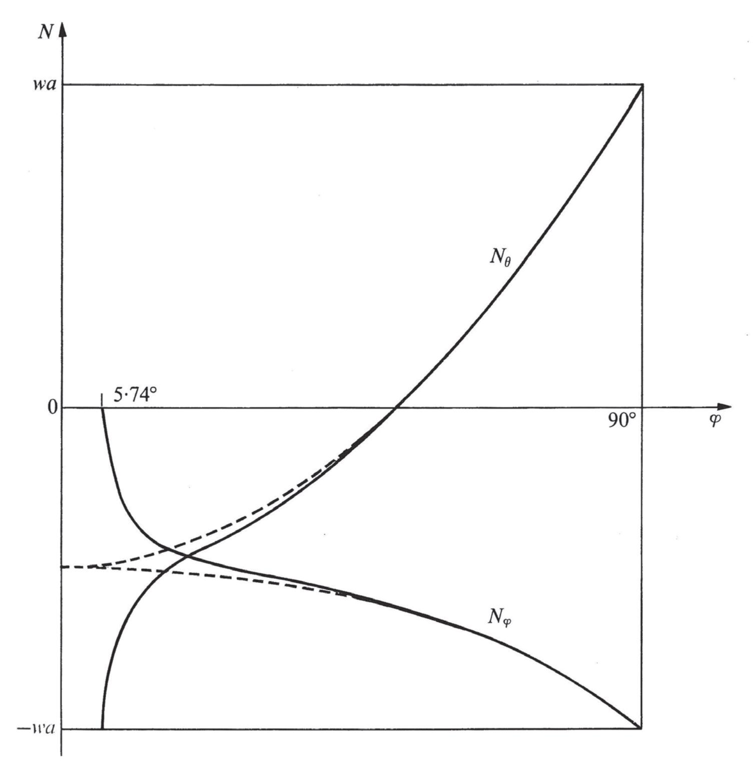


Fig. 1.13

El borde de la cúpula en el óculo puede aceptar una carga lineal, como la que surgiría de una linterna, y en la Fig. 1.14 se muestra una carga distribuida de valor p por unidad de longitud que actúa verticalmente.

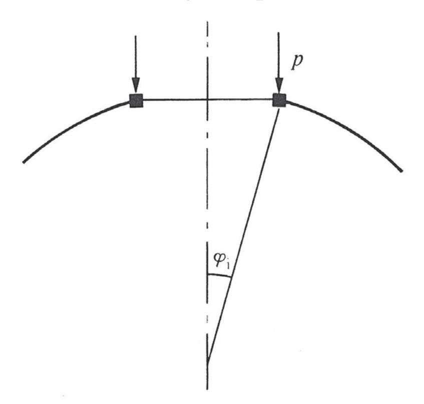


Fig. 1.14

Este borde de la cúpula debe rigidizarse con un anillo (que trabajará a compresión) ya que la cáscara sólo puede resistir fuerzas externas aplicadas tangencialmente. El valor de N_φ en $\varphi = \varphi_i$ debe tener el valor $-p/\text{sen}\varphi_i$; de forma más general, la consideración del equilibrio de un casquete de la cúpula cortado en un ángulo φ conduce a la expresión

$$N_\varphi = -p\frac{\text{sen}\,\varphi_i}{\text{sen}^2\,\varphi}, \tag{1.17}$$

y la ecuación (1.7) da $N_\varphi + N_\theta = 0$.

El valor de N_φ (y análogamente de N_θ) calculado a partir de la ecuación (1.17) debe superponerse a la resultante de tensiones de la carga permanente de la ecuación (1.16). Como otro ejemplo numérico, supongamos que el peso de la linterna es de 5.000 kN con un radio medio de 4 m, siendo el radio de la propia cúpula de 40 m (es decir, senφ_i = 0,1). (Estas cifras corresponden de forma aproximada a la cúpula de Santa Maria del Fiore en Florencia, que es, sin embargo, una cúpula poligonal de ocho lados, en lugar de una cáscara de revolución.) El valor de p es (5.000)/(8π) = 198,9 kN/m, por lo que N_φ para $\varphi = \varphi_i$ tiene el valor 1989 kN/m. Si se toma una tensión nominal de diseño baja de 1 N/mm², esto implica un espesor de la cúpula

de 1,989 m, unos 2 m, de modo que $R/t = 20$; la cúpula está justo en el límite de un análisis de cáscara «delgada». La cifra de 2 m se corresponde bastante bien con la de Santa Maria del Fiore, aunque la cúpula está construida en realidad con dos cáscaras.

La resultante de tensiones de compresión $N_\varphi = -2000$ kN/m en el óculo de la cúpula, debida a la linterna, irá acompañada de una resultante de tensiones de tracción $N_\theta = 2000$ kN/m. Si se quiere evitar toda tracción en el óculo, entonces la resultante de tensiones por el peso propio $N_\theta = -0{,}995wa$ (Fig. 1.13) deberá hacerse igual a −2000 kN/m. Así, con $a = 40$ m, el valor de w debe ser de unos 50 kN/m², lo que corresponde a un espesor de 2,5 m si el peso específico es de 20 kN/m³. Con estos valores particulares, las ecuaciones (1.16) y (1.17) dan

$$N_\varphi = -\frac{4000}{\mathrm{sen}^2\varphi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi+\varphi_i}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi-\varphi_i}{2}\right) - \frac{19{,}89}{\mathrm{sen}^2\varphi}, \tag{1.18}$$

y la ecuación (1.7) da

$$N_\theta = -N_\varphi - 2000\cos\varphi\,. \tag{1.19}$$

La Tabla 1.2 muestra el comportamiento de estas resultantes de tensiones.

ϕ (grados)	N_ϕ (kN/m)	N_θ (kN/m)
5·74	0 -1990 = -1990	0
7	- 330 -1340 = -1670	-320
10	- 680 - 660 = -1340	-630
15	- 870 - 300 = -1170	-770
20	- 950 - 170 = -1120	-760
30	-1030 - 80 = -1110	-620
40	-1110 - 50 = -1160	-380
50	-1200 - 30 = -1230	- 50
60	-1320 - 30 = -1350	+350

Tabla 1.2

Para φ = 30°, la resultante de tensiones debida al peso de la linterna ha caído hasta un 8% de la debida al peso propio de la cúpula. Las cifras se representan en la Fig. 1.15; a medida que el valor de φ aumenta más allá de unos 20°, el valor numérico de N_θ empieza a disminuir, y es inevitable que se produzca una tensión de tracción cuando el cosφ tiende a cero en la ecuación (1.19).

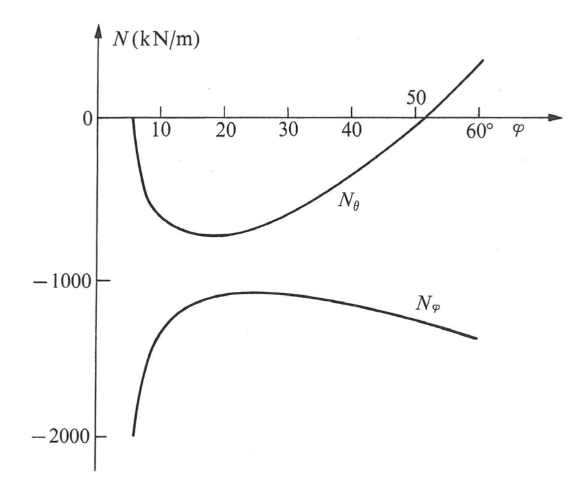


Fig. 1.15

Es interesante considerar el cálculo del anillo de refuerzo de compresión en el óculo de la cúpula. En planta, habrá una carga uniformemente distribuida hacia el interior de intensidad $p\cot\varphi_i$ actuando sobre el anillo (Fig. 1.16). Esta fuerza induce una compresión circunferencial de valor $P = pa\cos\varphi_i$ en el anillo; utilizando los valores anteriores,

$$P = (198{,}9)\,(40)\,(0{,}995) \;=\; 7920\ \text{kN}\,. \tag{1.20}$$

Si el anillo tiene el mismo espesor que la cáscara, 2,5 m, y si se especifica de nuevo un tensión de compresión de 1 N/mm², entonces es necesario un anillo de unos 3 m de ancho. Dicho anillo podría considerarse contenido dentro de la propia cáscara; es decir, la carga lineal p de la Fig. 1.14 podría distribuirse sobre la anchura de 3 m.

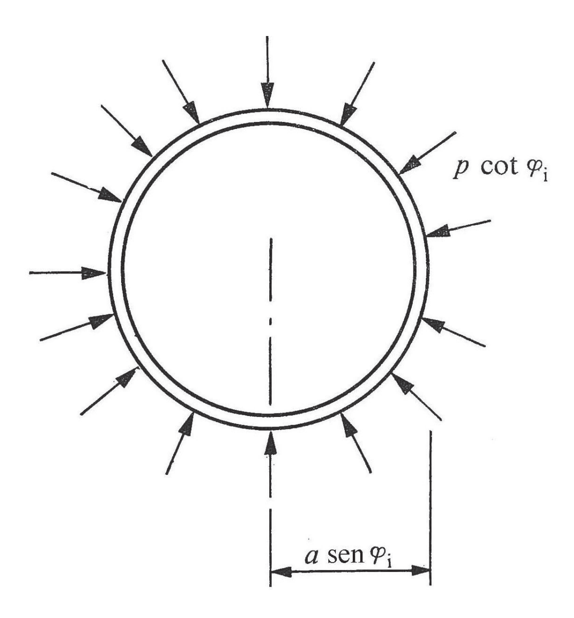


Fig. 1.16.

Independientemente de que la «viga anular» se considere o no parte de la cáscara (en una estructura de hormigón armado se debe prever un anillo de refuerzo independiente), está claro que hay una falta de «ajuste» entre el anillo y la cáscara propiamenta dicha. La fuerza de compresión P en el anillo, ecuación (1.20), dará lugar a una tensión anular en el anillo que, en general, no tendrá el mismo valor que la tensión anular en la parte adyacente de la cáscara. (Así, a partir de la Tabla 1.2, la tensión anular en la cáscara para este ejemplo numérico concreto es prácticamente nula.) Por lo tanto, las deformaciones elásticas en el anillo y en la cáscara serán diferentes, aunque en la realidad el anillo no está separado de la cáscara.

Una vez más, la teoría de membrana pura no ofrece una descripción exacta del comportamiento real de la estructura en esas zonas; en la práctica, la cáscara sufrirá cierta flexión local en la vecindad de esa falta de ajuste. No obstante, las tensiones de flexión son normalmente del mismo orden que las tensiones de membrana y, además, la zona del borde de la cáscara afectada por dicha flexión es pequeña; fuera de estas zonas, las resultantes simples de las tensiones de membrana describen bastante bien el estado real de tensiones. Así, se producirá cierta flexión

cerca del plano de apoyo diametral de arranque de la esfera de la Fig. 1.8, pero las ecuaciones (1.13) y (1.14) serán por lo demás en general válidas.

En términos más generales, el aparente problema de falta de ajuste, es decir, un aparente defecto de la teoría simple, surge porque esa teoría es estáticamente determinada. Las tensiones se calculan únicamente por referencia al equilibrio, y los dos enunciados estructurales adicionales, los de deformación y los de las características de tensión/deformación del material, no desempeñan ningún papel en el cálculo de la distribución primaria de fuerzas en la estructura. El hecho de que puedan existir regiones locales en las que estas fuerzas primarias no ofrezcan una descripción completa no hace que la teoría carezca de valor; al contrario, estos cálculos son una buena práctica según la teoría plástica simple desarrollada para las estructuras de acero dúctil. Para este tipo de estructuras, el enfoque del «límite inferior» ejemplificado por la satisfacción únicamente de las ecuaciones de equilibrio conduce a técnicas de cálculo seguras.

En la medida en que el tipo de cáscara del que se habla pueda considerarse que satisface los supuestos de la teoría plástica simple, el cálculo de equilibrio de las cáscaras también será seguro. De hecho, hay motivos para afirmar que, a menos que una estructura satisfaga más o menos los supuestos de la teoría plástica simple, será peligrosa en un sentido práctico real. Así, por ejemplo, el material de la cáscara no debe ser frágil; el hormigón armado es, de hecho, razonablemente dúctil, y la fábrica, como se verá en un análisis más completo de los principios plásticos que se dará en el capítulo 4, puede considerarse casi perfectamente plástica. Análogamente, los pequeños cambios en la geometría no deben conducir a cambios marcados en las ecuaciones de equilibrio; la cáscara debe ser, como lo es en la práctica, adecuadamente (aunque no perfectamente) rígida.

En estas condiciones, el enfoque del límite inferior implica que un cálculo que satisfaga todas las ecuaciones de equilibrio será seguro. El hecho de que puedan producirse flexiones locales no debilitará la cáscara (aunque puede haber otros efectos, por ejemplo, el agrietamiento del hormigón, que no reducirá la capacidad de carga pero puede ser perjudicial por otros motivos). En particular, un desajuste aparente en la deformación,

que surja de los valores calculados de las resultantes de tensiones de membrana, no reducirá por sí mismo la carga que la cáscara ha sido calculada para soportar.

Estas ideas se analizan con más detalle en la segunda parte de este libro. Para volver a la teoría de membrana simple, se investigará el cilindro circular como otro ejemplo en el análisis de cáscaras.

La bóveda de cañón bajo peso propio

En la Fig. 1.17 el cilindro semicircular tiene su eje horizontal. Un punto en la superficie del cilindro puede localizarse mediante una coordenada axial x y una coordenada angular θ. El radio del cilindro es a, y el peso uniforme por unidad de superficie es w; por el momento sólo se investigará esta carga gravitatoria.

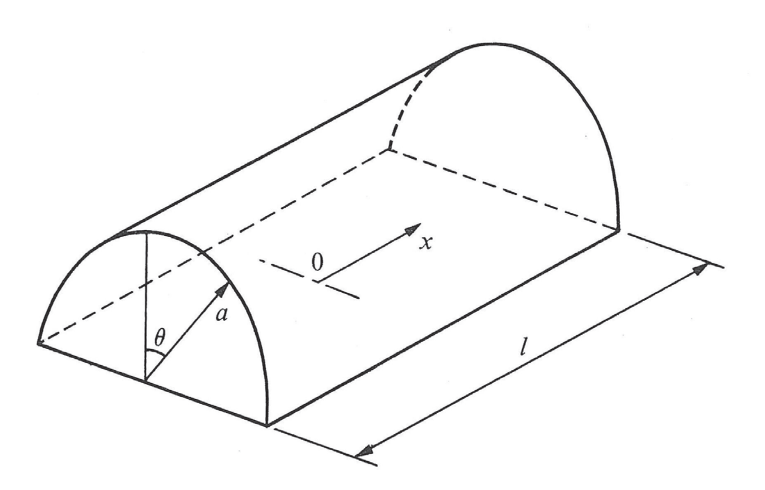


Fig. 1.17

Como en la cáscara esférica, hay tres resultantes de tensión independientes, designadas como N_x, N_θ y $N_{\theta x}$ ($= N_{x\theta}$) en la Fig. 1.18.

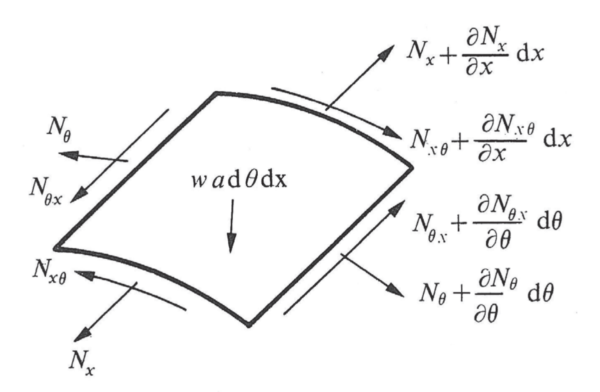


Fig. 1.18

Como antes, se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio, y la composición de las fuerzas en la dirección radial, la dirección circunferencial y la dirección axial conduce a las ecuaciones:

$$N_\theta = -wa\cos\theta\ , \tag{1.21}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} = -w\ \operatorname{sen}\theta\ , \tag{1.22}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta}+\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0\ . \tag{1.23}$$

Estas ecuaciones son particularmente sencillas en su forma, y pueden resolverse en el orden que se indica. Así, la introducción de (1.21) en (1.22) conduce a

$$N_{x\theta} = -2wx\ \operatorname{sen}\theta + f_1(\theta)\ , \tag{1.24}$$

y la introducción a su vez de (1.24) en (1. 23) conduce a

$$N_x = \frac{wx^2}{a}\cos\theta - \frac{x}{a}\frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} + f_2(\theta)\ . \tag{1.25}$$

En las ecuaciones (1.24) y (1.25), f_1 y f_2 son funciones arbitrarias de θ resultantes de las integraciones, cuya forma debe ser decidida por las condiciones de contorno para cualquier problema concreto. Sin embargo, antes de intentar una solución específica, cabe señalar una característica curiosa e importante de las ecuaciones (1.24) y (1.25). Supongamos que las condiciones de contorno sobre las tensiones se prescriben en una sección transversal particular, es decir, las distribuciones de $N_{x\theta}$ y N_x se especifican como funciones de θ para una sección dada x = const. La función f_1 puede entonces evaluarse a partir de la ecuación (1.24), y utilizando la expresión resultante para f_1, la segunda función f_2 puede evaluarse a partir de la ecuación (1.25). Sin embargo, la función f_2 no vuelve a aparecer en las expresiones de las demás resultantes de tensiones, y parece que la expresión de N_x es hasta cierto punto independiente de las demás resultantes de tensiones en la cáscara.

Como un ejemplo muy sencillo, supongamos que sobre el borde de la cáscara (digamos en $x = 0$, para simplificar) actúa una carga puntual en la dirección de una generatriz. Entonces la expresión apropiada para $f_2(\theta)$ en la ecuación (1.25) incluirá un término (convencionalmente, una función escalonada) para expresar la acción de esta carga puntual. La función escalonada reaparecerá sin modificaciones en cada sección transversal de la cáscara; la carga puntual que actúa a lo largo de una generatriz se transmitirá de sección a sección precisamente a lo largo de la generatriz, y no habrá, según la teoría simple de membrana, ninguna disipación de la carga en la cáscara. Como se verá en el capítulo 3, esta propagación de la tensión a lo largo de ciertas trayectorias, en este caso generatrices rectas, es típica del comportamiento cuando la curvatura local de la superficie de la cáscara se hace cero.

Así, una única generatriz de una cáscara cilíndrica sin peso puede ser puesta en tracción (o compresión) por un par de fuerzas iguales y opuestas que actúan en los extremos del cilindro. Una vez más, una cáscara de material ligeramente elástico estará sometida a deformaciones incompatibles; el alargamiento de la generatriz en cuestión no coincidirá con el de las generatrices sin deformar a ambos lados. En la práctica, por tanto, es de esperar que la carga puntual se difunda en la cáscara en mayor o menor medida.

Hay otras características del comportamiento general de las cáscaras que no surgieron en la solución para la esfera simple, pero que pueden ilustrarse con el problema específico de la bóveda de cañón de la Fig. 1.17. La ecuación (1.21) es sencilla porque las generatrices son rectas; la composición de las fuerzas normales a la cáscara implica sólo el peso y la resultante de tensiones anular N_θ. El valor de N_θ debe ser siempre $-wa\cos\theta$, independientemente de las condiciones de contorno que se prescriban. Así, para $\theta = \pm \pi/2$, la resultante de tensiones anular N_θ es cero; en la Fig. 1.17, si la bóveda de cañón es semicircular, aparentemente no se requiere ningún apoyo a lo largo de los bordes rectos de la cáscara, y surge la posibilidad de que dicha cáscara pueda utilizarse como una estructura de cubierta que salve la luz l. Sin embargo, se requieren ciertas disposiciones para que la estructura funcione correctamente, como puede verse evaluando las otras resultantes de tensiones.

Si el origen de x se toma en la mitad del vano, entonces la sección transversal en $x = 0$ estará sometida a una resultante de tensiones de cortante $N_{x\theta}$ nula, por simetría. Así, $f_1(\theta)$ en la ecuación (1.24) debe ser cero. Los extremos $x = \pm\frac{1}{2}l$ se supondrán libres de tensiones axiales, por lo que $f_2(\theta)$ en la ecuación (1.25) se determina como $-wl^2\cos\theta/4a$, y las resultantes de tensiones son por tanto

$$
\begin{aligned}
N_\theta &= -wa\ \cos\theta\ , \\
N_{x\theta} &= -2wx\ \operatorname{sen}\theta\ , \\
N_x &= -\frac{w\cos\theta}{4a}\,(\ell^2 - 4x^2)\,.
\end{aligned}
\qquad (1.26)
$$

Nótese que los bordes de la cáscara no están completamente libres de tensiones. A lo largo de los bordes rectos $\theta = \pm\pi/2$, las tensiones anulares y longitudinales son efectivamente nulas; sin embargo, existe una resultante de tensiones de cortante $N_{x\theta} = \mp 2wx$, y ésta debe introducirse de alguna manera desde el exterior. En la práctica, se disponen vigas de borde, y el efecto de las tensiones de cortante es poner las dos vigas de borde rectas en tracción (Fig. 1.19).

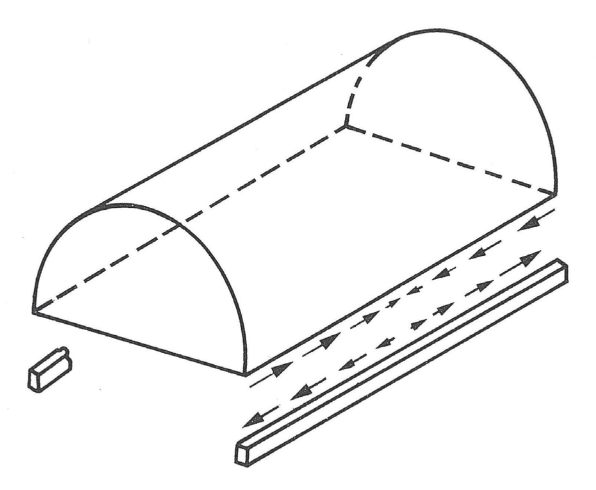


Fig. 1.19

Una simple integración muestra que la tracción T en una de las vigas de borde tiene el valor

$$T = -\int_{x}^{\ell/2} (N_{x\theta})_{\pi/2}\ dx = \int_{x}^{\ell/2} 2wx\ dx = \frac{w}{4}\ (\ell^2 - 4x^2)\,, \tag{1.27}$$

y ahora la razón física de la presencia de las dos vigas de borde resulta evidente. La propia cáscara está sometida a una resultante de tensiones axiales N_x que es siempre de compresión (Fig. 1.20); por tanto, en cualquier sección transversal, la fuerza axial total transmitida en la cáscara es

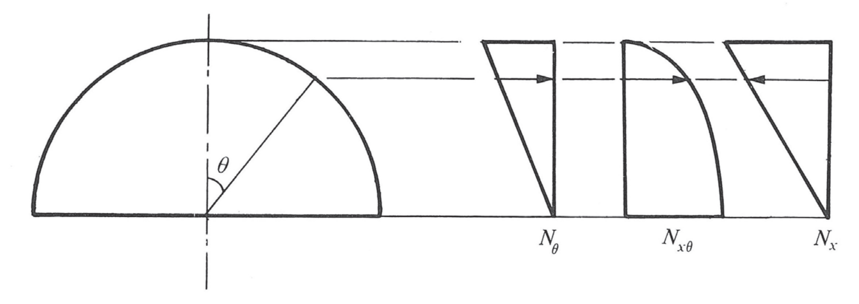


Fig. 1.20

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_x \cdot a d\theta = -\frac{w}{4}\left(\ell^2 - 4x^2\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = -\frac{w}{2}\left(\ell^2 - 4x^2\right), \tag{1.28}$$

y este valor equilibra justo la fuerza $2T$, donde T viene dada por la ecuación (1.27). Este tipo de comprobaciones sencillas sobre el equilibrio general, en este caso mediante la consideración del equilibrio de fuerzas a través de un corte transversal, son de gran importancia en el análisis de cáscaras; a menudo es posible deducir patrones de comportamiento importantes con muy poco trabajo matemático.

Los otros bordes curvos de la cáscara tampoco están completamente libres de tensiones, sino que deben aceptar tensiones de cortante de borde $N_{x\theta} = \mp wl\text{sen}\theta$. De nuevo hay que prever un elemento de borde; este elemento rigidizador podría ser un arco sin rigidez lateral (ya que N_x se ha fijado en cero), o una estructura en celosía, o quizás un muro diafragma delgado. El término diafragma se utilizará para describir cualquier miembro de este tipo que pueda aceptar fuerzas en su propio plano, pero que no ofrezca resistencia a las fuerzas perpendiculares a su plano.

Como en la cúpula esférica, normalmente habrá una falta de ajuste entre los elementos de borde y la cáscara propiamente dicha, que se resolverá en la práctica mediante momentos flectores en las zonas de borde de la cáscara. En el presente ejemplo, los rigidizadores longitudinales están a tracción, mientras que la resultante de tensiones longitudinales N_x en la cáscara, inmediatamente adyacente, es cero (Fig. 1.20). Por otra parte, los elementos longitudinales de borde, que tienen un tamaño y un peso finitos, deben soportarse de alguna manera. La resultante de tensiones anulares N_θ, ecuación (1.26), está determinada estáticamente; como su valor es cero para $\theta = \pi/2$ no puede ayudar a soportar las vigas. En la práctica, es posible que una bóveda de cañón de hormigón armado se agriete en la unión entre la cáscara y los nervios de borde. Siempre que se pueda seguir transmitiendo el cortante, las grietas no afectarán a su resistencia, pero pueden ser problemáticas en otros aspectos.

El proyectista debe ser consciente de estos y otros problemas similares cuando utilice la teoría de la membrana para obtener sistemas de fuerzas primarias en una cáscara. De hecho, estos problemas han sido expuestos en gran medida para los dos casos simples de la esfera y el cilindro, y ahora se hará un análisis más general de las cáscaras; el problema de la bóveda cilíndrica de cubierta se retomará en el capítulo 6.

2
Cáscaras de revolución

Ecuaciones generales

La cáscara esférica analizada en el capítulo 1 es una forma particularmente simple de cáscara de revolución, y el trabajo se simplificó aún más examinando sólo el caso de carga simétrica. A continuación se derivarán las ecuaciones generales de la cáscara de revolución y se estudiarán algunas soluciones.

La figura 2.1 muestra un esquema de la curva generatriz que gira alrededor del eje dado (vertical por comodidad) para formar la cáscara. Como en el capítulo 1, un punto en el meridiano se localiza por el ángulo φ, que, para la esfera, sería el complemento de la latitud. Así, un punto en la superficie de la cáscara se localizaría por valores dados de φ y del ángulo del meridiano θ, la longitud. En un punto de la cáscara el meridiano tiene un radio de curvatura r_1, como se muestra en la Fig. 2.1; éste es el radio de curvatura de la longitud de arco pequeña ds. El trozo de cáscara cortado por dos meridianos y dos círculos paralelos tiene, sin embargo, un segundo radio de curvatura r_2; las normales en puntos adyacentes de dos meridianos se cruzan en el eje de la cáscara, y r_2 es la longitud de la normal desde el punto de la cáscara hasta el eje.

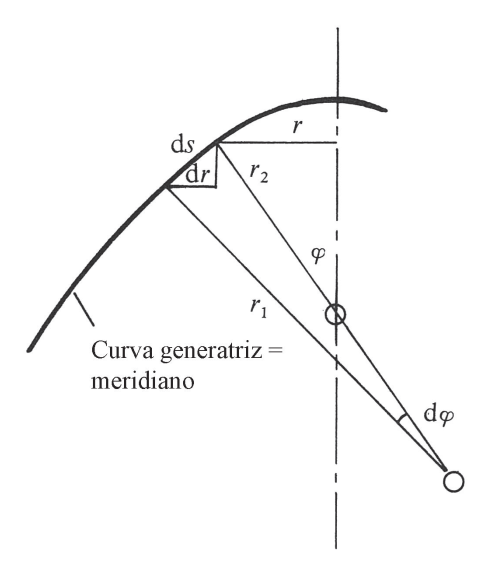


Fig. 2.1

Así, la superficie de la cáscara se describe mediante los cuatro parámetros θ, φ, r_1 y r_2, pero estas cantidades no son todas independientes. En efecto, en la Fig. 2.1 se observa que

$$\frac{dr}{ds} = \cos\varphi \quad \text{y} \quad \frac{ds}{d\varphi} = r_1\,, \tag{2.1}$$

de manera que

$$\frac{dr}{d\varphi} = r_1 \cos\varphi\,. \tag{2.2}$$

Ahora r, la distancia horizontal del punto de la cáscara al eje, es igual a r_2 senφ, de modo que la ecuación (2.2) establece que

$$\frac{d}{d\varphi}(r_2 \operatorname{sen}\varphi) = r_1 \cos\varphi. \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) es una forma particular de una de las ecuaciones de Codazzi para una superficie. Si α_1 y α_2 son coordenadas curvilíneas principales para la superficie, y A_1 y A_2 son los parámetros de Lamé tales que la medición de la distancia en las dos direcciones viene dada por

$$ds_1 = A_1 \; d\alpha_1 \, , \qquad ds_2 = A_2 \; d\alpha_2 \, , \tag{2.4}$$

entonces las relaciones de Codazzi son

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{A_2}{r_2}\right] = \frac{1}{r_1}\,\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \, , \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\frac{A_1}{r_1}\right] = \frac{1}{r_2}\,\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \, . \tag{2.5}$$

Además, una tercera y última relación debe cumplirse para la superficie, a saber, la ecuación de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{A_1}\,\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\frac{1}{A_2}\,\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right] = -\frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \, . \tag{2.6}$$

La figura 2.2 muestra un elemento pequeño de la cáscara, y se ve que las dimensiones del elemento, correspondientes a las ecuaciones (2.4), pueden escribirse

$$ds_\varphi = \; r_1 \; d\varphi \, , \qquad ds_\theta = \; (r_2 \operatorname{sen} \varphi) \; d\theta \, , \tag{2.7}$$

de modo que $A_1 = r_1$, $A_2 = r_2$ senφ. La primera de las ecuaciones (2.5) conduce inmediatamente a la ecuación (2.3); la segunda ecuación de Codazzi y la ecuación de Gauss se satisfacen idénticamente para una cáscara de revolución.

Los resultados generales de la geometría diferencial de las ecuaciones (2.5) y (2.6) no son necesarios aquí, pero, por supuesto, es importante apreciar que existe una, y sólo una, relación no trivial entre las magnitudes geométricas para una cáscara de revolución.

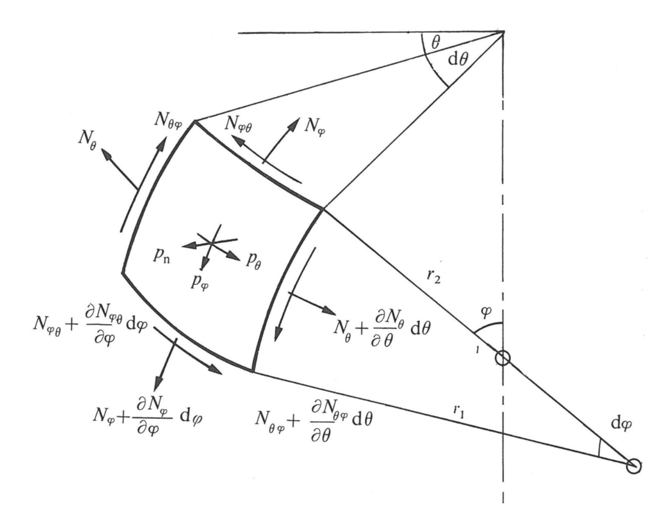


Figura 2.2

La consideración de las fuerzas que actúan sobre el elemento de la figura 2.2 da lugar, como es habitual, a tres ecuaciones de equilibrio. La carga exterior que puede estar actuando sobre el elemento se ha descompuesto en las tres componentes perpendiculares p_φ, p_θ y p_n que se muestran en la figura. La descomposición de las fuerzas en las tres direcciones es sólo ligeramente más complicada que el trabajo correspondiente para la esfera. En la dirección φ, por ejemplo, las fuerzas no equilibradas pueden sumarse para dar

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\ N_\varphi\right) d\theta\ d\varphi + r_1\,\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta}\,d\theta\,d\varphi - (N_\theta\, r_1 \cos\varphi)\,d\theta\ d\varphi +$$

$$+\,p_\varphi\,(r\,d\theta)\,(r_1\,d\varphi) = 0, \qquad (2.8)$$

esto es

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r_2\ N_\varphi\ \mathrm{sen}\,\varphi\right) + r_1\,\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta} - r_1\ N_\theta\ \cos\varphi = -p_\varphi\ r_1\ r_2\ \mathrm{sen}\varphi\,. \qquad (2.9)$$

Por comparación con la ecuación (1.6), se verá que ha entrado un término extra debido a la resultante de la tensión de cortante que no es nula.

Igualmente, componiendo en la dirección θ, se encuentra que

$$r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r_2\ N_{\varphi\theta}\ \mathrm{sen}\,\varphi\right) + r_1\ N_{\theta\varphi}\ \cos\varphi = -p_\theta\ r_1\ r_2\ \mathrm{sen}\varphi\,, \qquad (2.10)$$

y, por último, componiendo en la dirección radial,

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_n\,. \qquad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) son las tres ecuaciones de equilibrio que hay que resolver para una cáscara dada para las tres resultantes de tensiones de membrana.

Cáscara bajo presión interna

Antes de pasar a la solución general de las tres ecuaciones, cabe señalar que una cáscara de revolución sometida a una carga simétrica puede abordarse directamente sin necesidad de realizar ninguna integración. Como en el caso de la esfera (Fig. 1.6), se puede considerar el equilibrio global de un casquete de la cáscara.

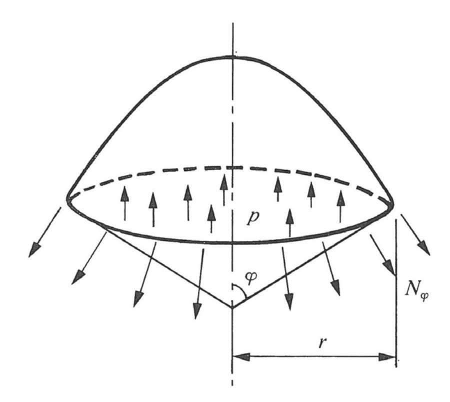


Fig. 2.3

Como problema típico de este tipo, estudiaremos una cáscara sometida a una presión interna p. La figura 2.3 muestra el casquete de la cáscara, y el equilibrio de fuerzas a través del plano de corte da

$$p\ (\pi r^2) \ = \ N_\varphi(2\pi r)\ \text{ sen}\,\varphi\,, \tag{2.12}$$

o, puesto que $r = r_2$ sen φ (Fig. 2.1),

$$N_\varphi = \tfrac{1}{2} p r_2\,. \tag{2.13}$$

Así, N_φ puede obtenerse directamente, y N_θ puede hallarse entonces a partir de la ecuación (2.11), en la que p_n se sustituye por p.

Como ejemplo numérico,[1] el recipiente a presión de la figura 2.4 está formado por un casquete esférico *B'AB* de radio 3*a*, una sección toroidal *BC* y una sección en barril *CDC'*, también de radio de curvatura 3*a*, siendo el conjunto una cáscara de revolución alrededor del eje *AA'*. Un estudio geométrico preliminar conduce a los valores $\alpha = 24{,}3°$, $SC = 1{,}90a$.

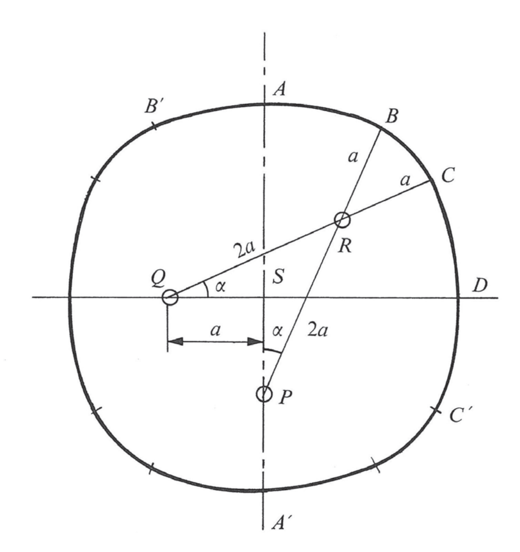


Fig. 2.4

[1] Este ejemplo se debe a P. G. Lowe, Cambridge Unversity Engineering Tripos Part II, 1975.

Así, recorriendo el meridiano desde A hasta D, el valor de r_2 se mantiene constante en $3a$ para el casquete esférico, disminuye en el toroide desde $3a$ en B hasta l,90a en C, y luego aumenta en el barril desde l,90a en C hasta $2a$ en D. En los puntos principales, entonces, el valor de N_φ viene dado, a partir de la ecuación (2.13), por los valores de la Tabla 2. 1.

Punto	A	B	B	C	C	D
r_2	$3a$	$3a$			$1{\cdot}90a$	$2a$
N_ϕ	$1{\cdot}50\ pa$	$1{\cdot}50\ pa$			$0{\cdot}95\ pa$	pa
r_1	$3a$	$3a$	a	a	$3a$	$3a$
N_θ	$1{\cdot}50\ pa$	$1{\cdot}50\ pa$	$-1{\cdot}50\ pa$	$0{\cdot}10\ pa$	$1{\cdot}30\ pa$	$1{\cdot}33\ pa$

Tabla 2.1

En las uniones B y C el valor de r_1 salta (de $3a$ á a en B, por ejemplo, donde la esfera se une al toroide), y la ecuación (2.11) indica que el valor de N_θ también debe saltar. En el casquete esférico el valor de N_θ es constante, y viene dado por

$$\frac{1 \cdot 50\ pa}{3a} + \frac{N_\theta}{3a} = p\ ,$$

$$\text{ó } N_\theta = 1{,}5\,pa\,. \qquad (2.14)$$

Sin embargo, en el punto B del toroide,

$$\frac{1 \cdot 50\ pa}{a} + \frac{N_\theta}{3a} = p\ ,$$

$$\text{ó } N_\theta = -1{,}5\,pa\,. \qquad (2.15)$$

En la última línea de la Tabla 2.1 se indican los valores más destacados de N_θ. El comportamiento general de las resultantes de tensiones se dibuja en la Fig. 2.5, y se pueden hacer dos observaciones. En primer lugar, la resultante de tensiones anulares N_θ es de compresión en *B* en el toroide, y puede haber cierto peligro de fallo por inestabilidad. En segundo lugar, en *B* (y también en *C*) existe evidentemente una incompatibilidad en la deformación anular entre el material del casquete esférico y el del toroide; una deformación es de tracción y la otra de compresión.

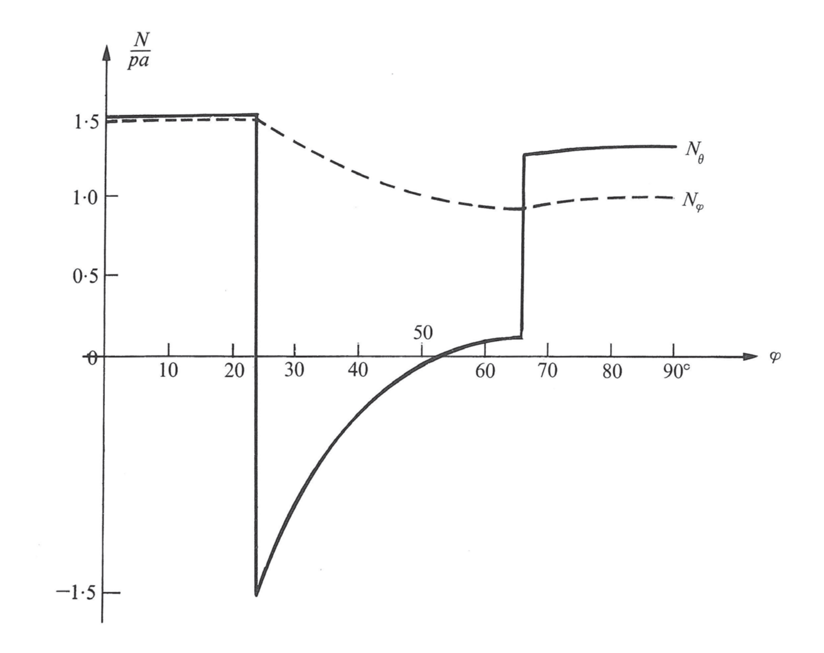


Fig. 2.5

Este es un ejemplo más del tipo de comportamiento mencionado en el capítulo 1, pero aquí la incompatibilidad es interna y no en un borde o soporte. Al igual que antes, la teoría simple de membrana no da cuenta completa del sistema de tensiones real en las uniones *B* y *C*; el recipiente a presión de la Fig. 2.4 debe estar inevitablemente sujeto a cierta flexión en los puntos de curvatura discontinua.

En general, la ecuación (2.11) indica que si se quieren evitar las discontinuidades en las tensiones, no basta con que la cáscara tenga una mera continuidad de pendiente, sino que no debe haber saltos de curvatura.

Cargas con simetría axial

Para el problema general, que implica las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden (2.9) y (2.10), se puede eliminar N_θ ó N_φ mediante la ecuación (2.11), dejando dos ecuaciones para dos resultantes de tensiones incógnitas. Estas dos ecuaciones pueden combinarse para dar una única ecuación de segundo orden, y no es difícil seguir la manipulación para el caso general antes de introducir la simplificación de la carga simétrica. La ecuación (2.11) puede escribirse

$$N_\theta = p_n r_2 - \frac{r_2}{r_1} N_\varphi \ , \tag{2.16}$$

y las ecuaciones (2.9) y (2.10) se convierten en

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r_2 \ \mathrm{sen}\,\varphi \ N_\varphi\right) + r_2 \ \cos\varphi \ N_\varphi + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta} = r_1 \ r_2 \left(p_n \ \cos\varphi - p_\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi\right),$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r_2 \ \mathrm{sen}\,\varphi \ N_{\theta\varphi}\right) + r_1 \ \cos\varphi \ N_{\theta\varphi} - r_2 \frac{\partial N_\varphi}{\partial\theta} = -r_1 \ r_2 \left(p_\theta \ \mathrm{sen}\,\varphi + \frac{\partial p_n}{\partial\theta}\right). \tag{2.17}$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned} U &= r_2 \ \mathrm{sen}^2\varphi \ N_\varphi \ , \\ V &= r_2^{\,2} \ \mathrm{sen}^2\varphi \ N_{\theta\varphi} \ , \end{aligned} \tag{2.18}$$

de manera que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{r_2^{\,2}}{r_1} \mathrm{sen}\,\varphi \ \frac{\partial U}{\partial\varphi} = r_2^{\,3} \ \mathrm{sen}^2\varphi \ \left(p_n \cos\varphi - p_\varphi \ sen\,\varphi\right), \\ &\frac{\partial V}{\partial\varphi} - \frac{r_2}{\mathrm{sen}\,\varphi} \ \frac{\partial U}{\partial\theta} = - r_1 r_2^{\,2} \ \mathrm{sen}\,\varphi \left(p_\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{\partial p_n}{\partial\theta}\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

La variable V puede eliminarse inmediatamente y esto lleva a una ecuación diferencial parcial de segundo orden para U. Si se realiza dicha eliminación, se verá que los términos de segundo orden en U son

$$r_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + r_1 r_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} .$$

Las características esenciales de la solución de la ecuación dependen de los signos relativos de los coeficientes de estos dos términos. El coeficiente del primer término es siempre positivo, pero el producto $r_1 r_2$ será negativo para cáscaras del tipo dibujado en la Fig. 2.6, en las que los radios vectores r_1 y r_2 están en lados opuestos de la cáscara (cf. Fig. 2.1). En el capítulo 3, en el que se estudian las cáscaras de forma general, se profundiza en esta cuestión.

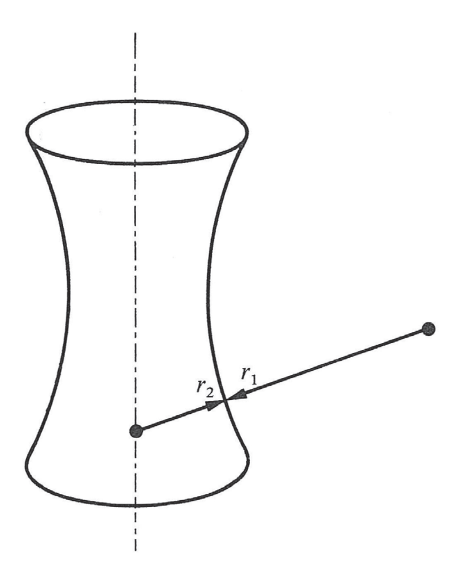


Fig. 2.6

Para el caso de carga simétrica, no es necesario resolver simultáneamente las ecuaciones (2.19). Las dos ecuaciones no contendrán derivadas con respecto a θ, de modo que se desacoplan para dar

$$\frac{dU}{d\varphi} = r_1 r_2 \ \text{sen}\,\varphi \ (p_n \cos\varphi - p_\varphi \,\text{sen}\,\varphi)\,, \tag{2.20}$$

y

$$\frac{dV}{d\varphi} = -r_1\, r_2^2 \ \text{sen}^2\varphi \ \ p_\theta\,. \tag{2.21}$$

La variable V, ecuación (2.18), se relaciona directamente con la resultante de tensiones de cortante $N_{\theta\varphi}$ de modo que la ecuación (2.21) da las tensiones cortantes que surgen de una posible carga tangencial p_θ. Si existe dicha carga, esta parte de la solución puede tratarse por separado. La parte principal de la solución viene dada por la ecuación (2.20); la ecuación puede integrarse para obtener U, y, por tanto, N_φ y finalmente N_θ puede encontrarse a partir de la ecuación (2.11). Como primer ejemplo, la esfera bajo peso propio tiene

$$\begin{aligned} p_\varphi &= w \ \text{sen}\,\varphi\,, \\ p_n &= -w \ \cos\varphi\,, \\ p_\theta &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.22}$$

y, fijando $r_1 = r_2 = a$, la ecuación (2.20) da

$$\frac{dU}{d\varphi} = -\,wa^2 \ \text{sen}\,\varphi \tag{2.23}$$

Por tanto

$$U = wa^2 \ \cos\varphi \ + \ C'\,, \tag{2.24}$$

por lo que, a partir de las ecuaciones (2.18),

$$N_\varphi = \frac{wa\cos\varphi}{\text{sen}^2\,\varphi} + \frac{C}{\text{sen}^2\,\varphi}\,\cdot \tag{2.25}$$

Esto puede compararse con la solución directa que condujo a la ecuación (1.8).

Como segundo ejemplo, la cáscara elipsoidal de revolución de la Fig. 2.7 con semiejes a y b tiene radios de curvatura

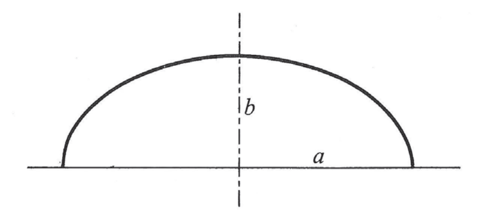


Fig. 2.7.

$$r_1 = \frac{a^2\, b^2}{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} \,,$$
$$r_2 = \frac{a^2}{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \,. \qquad (2.26)$$

(Puede comprobarse que estos valores satisfacen la ecuación (2.3).) Bajo peso propio, con componentes de carga (2.22), la ecuación (2.20) se convierte en

$$\frac{dU}{d\varphi} = -wr_1\, r_2 \operatorname{sen} \varphi = -\frac{wa^4\, b^2 \operatorname{sen} \varphi}{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2} \qquad (2.27)$$

La solución de la ecuación (2.27) es un ejercicio de integración. Las sustituciones

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad (2.28)$$

y

$$c \cos \varphi = a \cos \psi \qquad (2.29)$$

simplifican la ecuación (2.27) en

$$\frac{dU}{d\psi} = -\frac{wa\ b^2}{c\ \text{sen}^3\ \psi} \tag{2.30}$$

Al integrar se obtiene

$$U = -\frac{wa^2 b^2}{2}\left[\frac{1}{2ac}\log\left(\frac{a - c\ \cos\varphi}{a + c\ \cos\varphi}\right) - \frac{\cos\varphi}{a^2\ \text{sen}^2\ \varphi + b^2\ \cos^2\ \varphi} + K\right], \tag{2.31}$$

donde *K* es una constante de integración. A partir de la expresión para *U* dada en las ecuaciones (2.18) se verá que si debe permanecer finito, entonces *U* debe ser cero para $\varphi = 0$, lo que lleva a

$$K = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{2ac}\log\left(\frac{a-c}{a+c}\right). \tag{2.32}$$

Finalmente

$$N_\varphi = -\frac{wb^2}{2\text{sen}^2\ \varphi}\ (a^2\ \text{sen}^2\ \varphi + b^2\ \cos^2\ \varphi)^{\frac{1}{2}}\ \left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\cos\varphi}{a^2\ \text{sen}^2\ \varphi + b^2\ \cos^2\ \varphi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2ac}\log\left(\frac{a - c\ \cos\varphi}{a + c\ \cos\varphi}\right)\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\right] \tag{2.33}$$

El valor de N_θ viene dado, como es habitual, por la ecuación (2.11).

En particular, en la coronación del elipsoide ($\varphi = 0$), las resultantes de tensión tienen valor

$$N_\theta = N_\varphi = -\frac{wa^2}{2b} \tag{2.34}$$

La cáscara cónica

La coordenada φ no siempre es adecuada para la descripción del meridiano de una cáscara de revolución; un ejemplo obvio es la cáscara cónica, en la que el ángulo del meridiano tiene un valor constante de φ, pero hay otros casos en los que surgen dificultades porque las resultantes de tensiones ya no son funciones de un sólo valor de φ. Para este tipo de cáscaras es conveniente sustituir φ por una coordenada s que mide la distancia (desde un punto fijo arbitrario) a lo largo del meridiano. En la figura 2.1 se ve que

$$ds = r_1 \ \mathrm{d}\varphi \,, \tag{2.35}$$

y las ecuaciones (2.9) y (2.10) pueden sustituirse, en general, por

$$\frac{\partial}{\partial s}(r_2 \operatorname{sen}\varphi \ N_s) + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} - \cos\varphi \ N_\theta = -p_s \ r_2 \ \operatorname{sen}\varphi \,,$$

y (2.36)

$$\frac{\partial}{\partial s}(r_2 \operatorname{sen}\varphi \ N_{s\theta}) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos\varphi \ N_{\theta s} = -\,p_\theta \ r_2 \operatorname{sen}\varphi \ ,$$

donde φ es ahora una función (conocida) de la nueva coordenada s. La tercera ecuación, (2.11), no cambia:

$$\frac{N_s}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_n \,. \tag{2.37}$$

Si, como antes, se utiliza la ecuación (2.37) para eliminar N_θ, entonces las ecuaciones (2.36) se convierten en

$$\frac{\partial}{\partial s}(r_2 \operatorname{sen}\varphi \ N_s) + \frac{r_2}{r_1} \ \cos\varphi \ N_s + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} = r_2 \ (p_n \ \cos\varphi - p_s \operatorname{sen}\varphi) \,,$$

y (2.38)

$$\frac{\partial}{\partial s}(r_2 \operatorname{sen}\varphi \ N_{s\theta}) + \cos\varphi \ N_{s\theta} - \frac{r_2}{r_1}\frac{\partial N_s}{\partial \theta} = -r_2 \ \left(p_\theta \ \operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial p_n}{\partial \theta}\right).$$

Además, fijando

$$U = r_2 \operatorname{sen}^2 \varphi \; N_s \,,$$
$$V = r_2^{\,2} \operatorname{sen}^2 \varphi \; N_{s\theta} \,, \tag{2.39}$$

entonces

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + r_2^{\,2} \operatorname{sen} \varphi \, \frac{\partial U}{\partial s} = r_2^{\,3} \, \operatorname{sen}^2 \varphi \; (p_n \cos \varphi - p_s \operatorname{sen} \varphi) \,,$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{r_2}{r_1 \operatorname{sen} \varphi} \, \frac{\partial U}{\partial \theta} = -r_2^{\,2} \, \operatorname{sen} \varphi \left(p_\theta \operatorname{sen} \varphi + \frac{\partial p_n}{\partial \theta} \right). \tag{2.40}$$

Estas ecuaciones generales adoptan una forma especialmente sencilla para el cono (Fig. 2.8) para el que

$$\varphi = \text{const.} = \frac{\pi}{2} - \beta \,,$$
$$r_1 = \infty \,, \tag{2.41}$$
$$r_2 = s \tan \beta \,.$$

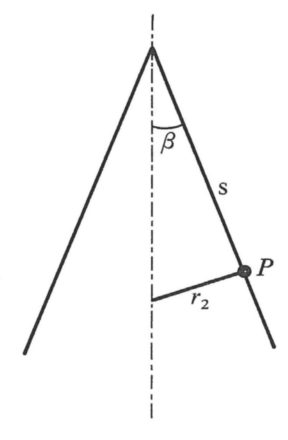


Fig. 2.8

La ecuación (2.37) se resuelve de inmediato para dar $N_\theta = s \tan\beta\, p_n$. La segunda de las ecuaciones (2.40) puede resolverse para dar V (y por tanto $N_{s\theta}$) y la primera para dar U (y por tanto N_s).

Como ejemplo, para el cual es fácil resolver directamente las ecuaciones originales (2.36) y (2.37), se puede considerar el efecto del viento sobre una aguja. Es convencional, y razonablemente correcto, representar el efecto del viento mediante una presión normal:

$$\begin{aligned} p_s &= p_\theta = 0 \\ p_n &= -\tfrac{1}{2} p \cos\beta \cos\theta \;. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Si se introducen estos valores en las ecuaciones (2.36) y (2.37), y se utilizan las ecuaciones (2.41), las tres ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} &N_\theta = -\tfrac{1}{2} p\ s\ \operatorname{sen}\beta \cos\theta \,, \\ &\frac{\partial}{\partial s}(s\, N_{s\theta}) + N_{s\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = 0 \;, \\ &\frac{\partial}{\partial s}(s\, N_s) - N_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} = 0 \;. \end{aligned} \tag{2.43}$$

La segunda de las ecuaciones (2.43) da

$$N_{s\theta} = -\frac{1}{6}\, p\ s\ \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{s^2}\, f\,(\theta)\,, \tag{2.44}$$

donde $f(\theta)$ es una función arbitraria de integración; como $N_{s\theta}$ debe permanecer finito en el vértice de la aguja, entonces $f(\theta) = 0$. La última de las ecuaciones (2.43) da entonces

$$N_s = \frac{1}{12}\, p\ s\ \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\beta}\ (1 - 3\operatorname{sen}^2\beta)\,, \tag{2.45}$$

con una segunda función arbitraria de integración que vuelve a ser idéntica a cero si se quieren evitar tensiones infinitas en el vértice de la aguja. En el

capítulo 5 se utilizarán estas expresiones para las resultantes de tensiones debidas al viento.

Pueden estudiarse las ecuaciones para el caso en que las cargas se apliquen en el vértice del cono y todas las demás cargas sean nulas; es de esperar que se produzcan tensiones infinitas en el vértice, por lo que el cálculo práctico cerca del vértice debe considerarse por separado. Se aplican las ecuaciones (2.43), con p y, por tanto, N_θ iguales a cero; las soluciones son

$$N_\theta = 0\,,$$

$$N_{s\theta} = \frac{1}{s^2}\, f\,(\theta) \tag{2.46}$$

$$N_s = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\;\frac{1}{s^2}\, f'\,(\theta) + \frac{1}{s}\, g\,(\theta)\,,$$

donde $f(\theta)$ y $g(\theta)$ son dos funciones arbitrarias de integración.

La carga aplicada en el vértice podría ser una fuerza con componentes X, Y, Z, y un momento con componentes M_x, M_y, M_z (Fig. 2.9).

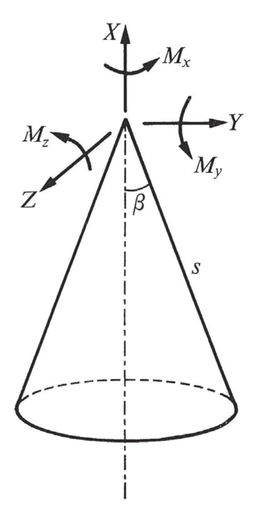


Fig. 2.9

La consideración del equilibrio de una porción del cono conduce a ecuaciones como

$$X = \int_0^{2\pi} (N_s \cos\beta)\ (s\ \operatorname{sen}\beta\ d\theta)\,,$$

$$Y = \int_0^{2\pi} (N_s \operatorname{sen}\beta\ \cos\theta)\ (s\ \operatorname{sen}\beta\ d\theta) + \\ + \int_0^{2\pi} (N_{s\theta} \operatorname{sen}\theta)\ (s\ \operatorname{sen}\beta\ d\theta)\,, \tag{2.47}$$

$$M_x = \int_0^{2\pi} (s\ \cos\beta)\ (N_{s\theta})\ (s\ \operatorname{sen}\beta\ d\theta)\,,\ \text{etc.}$$

Como ejemplo, si

$$f(\theta) = A\cos\theta\,, \qquad g(\theta) = B\cos\theta\,, \tag{2.48}$$

donde A y B son constantes, entonces la introducción de las ecuaciones (2.46) en (2.47) conduce a

$$X = Z = 0\,, \qquad M_x = M_z = 0\,,$$
$$Y = B\pi\ \operatorname{sen}^2\beta\,, \qquad M_y = A\pi\ \operatorname{sen}\beta\ \cos\beta\,. \tag{2.49}$$

Por lo tanto, se puede concluir que una carga Y en el vértice, en el plano $\theta = 0$, produce las resultantes de tensiones

$$N_\theta = N_{s\theta} = 0\,.$$
$$N_s = \frac{Y}{\pi s\ \operatorname{sen}^2\beta}\cos\theta\,, \tag{2.50}$$

mientras que un momento M_y en el vértice del cono produce las resultantes de tensiones

$$N_\theta = 0\,,$$

$$N_{s\theta} = \frac{M_y}{\pi s^2 \;\operatorname{sen}\beta\; \cos\beta}\,\cos\theta, \tag{2.51}$$

$$N_s = -\frac{M_y}{\pi s^2 \;\operatorname{sen}\beta\; \cos\beta}\,\operatorname{sen}\theta\,.$$

A estos resultados se pueden añadir las soluciones triviales para una fuerza axial X y un momento M_x:

$$N_\theta = 0\,,$$

$$N_{s\theta} = \frac{M_x}{2\pi s^2 \;\operatorname{sen}^2\beta}\,, \tag{2.52}$$

$$N_s = \frac{X}{2\pi s \;\operatorname{sen}\beta\; \cos\beta}\,.$$

La solución completa puede escribirse a partir de las ecuaciones (2.50), (2.51) y (2.52) para cualquier carga en el vértice.

Viento en una torre de refrigeración

Como otro ejemplo de la forma en que puede deducirse el comportamiento general a partir del examen de las ecuaciones básicas de equilibrio, se considera una torre de refrigeración que, a efectos de estudio, se sustituye por un cilindro circular vertical libre en su borde superior. La carga de viento se tomará como una distribución de presiones

$$p_n = -p\,(\theta) \tag{2.53}$$

que actúan en la normal a la superficie del cilindro. A partir de la Fig. 2.10, las tres ecuaciones básicas son

$$N_\theta = ap_n \,,$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{a}\,\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = 0\,, \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\,\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = 0\,,$$

(compárese con las ecuaciones (1.21), (1.22) y (1.23); la derivación de las ecuaciones generales (2.36) no es sencilla cuando tanto $\varphi = 0$ como $r_1 = \infty$). Las ecuaciones (2.54) pueden resolverse sucesivamente para obtener

$$N_\theta = -ap\,,$$

$$N_{x\theta} = x\,\frac{dp}{d\theta}\,, \tag{2.55}$$

$$N_x = -\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a}\,\frac{d^2p}{d\theta^2}\,,$$

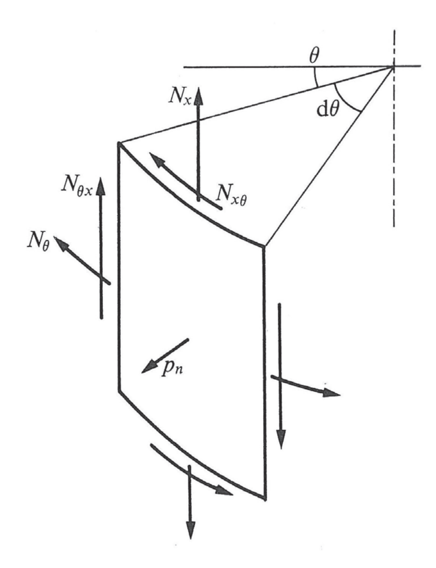


Fig. 2.10.

donde x se mide verticalmente hacia abajo desde la parte superior del cilindro, y las dos funciones arbitrarias de integración son ambas cero. Si la presión del viento se expresa mediante la serie de Fourier del coseno

$$p = p_1 \cos\theta + p_2 \cos 2\theta + p_3 \cos 3\theta + \cdots, \tag{2.56}$$

entonces el valor de N_x es

$$N_x = \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}\,(p_1 \cos\theta + 4p_2 \cos 2\theta + 9p_3 \cos 3\theta + \cdots), \tag{2.57}$$

y en $\theta = 0$, por ejemplo,

$$(N_x)_0 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}\,(p_1 + 4p_2 + 9p_3 + \cdots). \tag{2.58}$$

En esta expresión, el primer término, $\frac{1}{2}(x^2/a)p_1$ representa la resultante de tensiones dada por la teoría de flexión simple en la que el cilindro se trata como una viga en voladizo. Según la teoría de la flexión simple no hay contribuciones de los armónicos superiores, mientras que la teoría de membrana de la cáscara que conduce a la ecuación (2.58) deja claro que, si los armónicos tienen amplitudes razonables, pueden provocar grandes tensiones en el cilindro.

La sustitución de una torre de refrigeración, de perfil entallado, por un cilindro circular recto parece burda. Sin embargo, las torres de refrigeración prácticas suelen consistir en dos troncos de cono, conectados por una sección toroidal en el centro; el examen de las ecuaciones (2.43) para el cono muestra la misma característica esencial de un término en $d^2p/d\theta^2$ en la expresión para N_s, que conduce a una crecimiento de las amplitudes de los armónicos superiores.

3
Cáscaras de forma cualquiera

Ecuaciones generales

En los ejemplos que se han estudiado hasta ahora se han explotado ciertas simetrías de cáscaras particulares que conducen a alguna simplificación de las ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones tampoco son muy complicadas si se escriben para cáscaras de forma arbitraria, y pueden utilizarse aquí con dos fines. En primer lugar, servirán para ilustrar los diferentes comportamientos que presentan las cáscaras de curvatura gaussiana negativa frente a las de curvatura positiva (véanse las figuras 2.1 y 2.6; una cúpula tiene curvatura gaussiana positiva, mientras que la de un hiperboloide de revolución es negativa). En segundo lugar, se obtendrán soluciones para sistemas de cubierta sencillos, de cierta aplicación en la práctica moderna del hormigón armado.

El análisis se referirá a coordenadas cartesianas rectangulares fijas x, y, z, en las que, por comodidad en el manejo de las estructuras de cubierta, el plano xy es horizontal y el eje z vertical hacia abajo. Una vez dominadas las matemáticas, resulta ventajoso abordar la geometría de la superficie de la cáscara mediante coordenadas curvilíneas, por ejemplo al escribir las relaciones de Codazzi, ecuaciones (2.5). Sin embargo, el sistema de coordenadas fijas es suficiente para los ejemplos sencillos que se consideran en este capítulo.

La superficie de la cáscara tendrá la forma explícita $z = f(x,y)$, y se considerará el equilibrio de un elemento dA de la cáscara que se proyecta en el rectángulo dx, dy en el plano $z = 0$ (Fig. 3.1). El elemento dA tiene lados de longitudes ds_1 y ds_2, y está inclinado respecto al plano z = const. con ángulos ψ y θ como se indica. Se pueden establecer las siguientes relaciones geométricas:

$$\tan\psi = \frac{\partial z}{\partial x} \ ,$$
$$\tan\theta = \frac{\partial z}{\partial y} \ , \qquad (3.1)$$

junto con

$$ds_1 \cos\psi = dx \ ,$$
$$ds_2 \cos\theta = dy \ . \qquad (3.2)$$

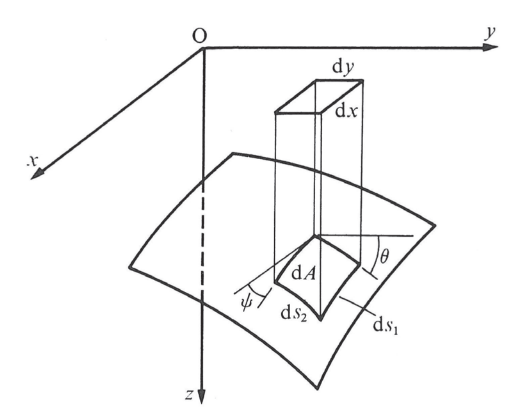


Figura 3.1

La figura 3.2 muestra las resultantes de tensiones de membrana N_x, N_y y N_{xy} ($= N_{yx}$) que actúan en el plano tangente a la superficie. Exactamente igual que antes, se pueden establecer tres ecuaciones de equilibrio descomponiendo las fuerzas sobre el elemento en tres direcciones. En la ecuación que expresa el equilibrio horizontal en la dirección del eje x, por ejemplo, la componente horizontal de N_x es

$$N_x \ ds_2 \ \cos\psi \ .$$

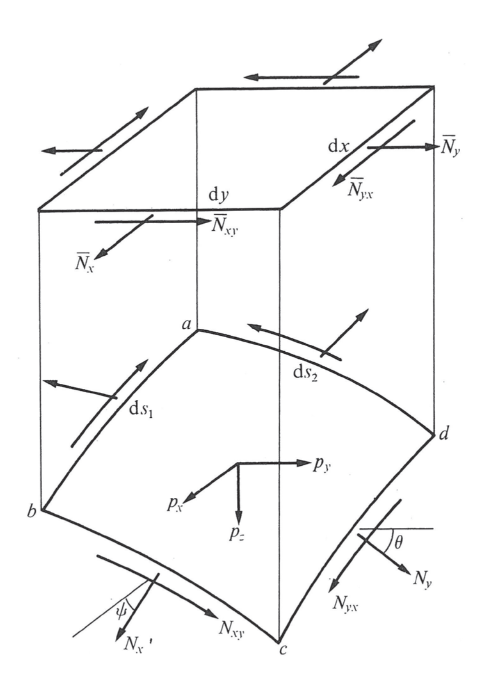


Figura 3.2

Utilizando la segunda de las expresiones (3.2), esta componente es igual a

$$N_x \frac{\cos\psi}{\cos\theta} dy = \overline{N}_x dy ,$$

donde $\overline{N}_x$, definida como N_x ($\cos\psi/\cos\theta$), es la resultante de tensiones proyectada equivalente en el plano $z = 0$.

Consideraciones similares para las demás resultantes de tensiones proyectadas marcadas en la Fig. 3.2 conducen al conjunto completo de relaciones

$$\overline{N}_x = \frac{\cos\psi}{\cos\theta} N_x ,$$

$$\overline{N}_y = \frac{\cos\theta}{\cos\psi} N_y , \tag{3.3}$$

$$\overline{N}_{xy} = N_{xy} = N_{yx} = \overline{N}_{yx} .$$

Para un problema particular se tomarán como variables estas resultantes de tensiones proyectadas $\bar{N}_x$, etc.; cuando se haya obtenido la solución, las resultantes de tensiones reales N_x, etc. podrán hallarse a partir de las expresiones (3.3). Las dos cantidades $\cos\psi$ y $\cos\theta$ vienen dadas por las ecuaciones (3.1) como

$$\cos\psi = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$\cos\theta = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} . \qquad (3.4)$$

Las ecuaciones de equilibrio en las direcciones x e y pueden escribirse en la forma habitual para el elemento proyectado de la figura 3.2. Si p_x, p_y y p_z son las componentes de la carga que actúa sobre el área dA de la cáscara, y si $\bar{p}_x$, etc. son las componentes equivalentes de la carga que actúa sobre $dxdy$ (es decir, $p_x dA = \bar{p}_x dxdy$, etc.), entonces

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} + \bar{p}_x = 0 ,$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \bar{p}_y = 0 . \qquad (3.5)$$

Ahora se puede introducir una función de tensión φ para sustituir las ecuaciones (3.5) si se define de forma que

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \int \bar{p}_x \, dx$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \int \bar{p}_y \, dy , \qquad (3.6)$$

$$\bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} .$$

La tercera y última ecuación de equilibrio puede escribirse descomponiendo las fuerzas que actúan sobre el elemento dA de la cáscara en la di-

rección del eje z. En el lado ad, por ejemplo, (Fig. 3.2), la componente vertical de N_x es

$$N_x \; ds_2 \;\; \text{sen}\, \psi$$

$$= \left(\bar{N}_x \frac{\cos\theta}{\cos\psi}\right)\left(\frac{dy}{\cos\theta}\right)(\text{sen}\,\psi)\;, \text{ usando (3.3) y (3.2),}$$

$$= \bar{N}_x \tan\psi \;\; dy$$

$$= \bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \; dy\,, \text{ usando (3.1).}$$

Así, al pasar del lado ad del elemento al lado bc, habrá una fuerza vertical desequilibrada

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx \;\; dy\,.$$

Las otras resultantes de tensiones de membrana pueden ser tratadas de la misma manera, para llevar a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \bar{p}_z = 0\,. \tag{3.7}$$

Haciendo las derivadas, y con la ayuda de las ecuaciones (3.5), la ecuación (3.7) se simplifica en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\bar{N}_x + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,\bar{N}_{xy} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\bar{N}_y = -\bar{p}_z + \bar{p}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y}\;. \tag{3.8}$$

Por último, se puede introducir la función de tensión φ a partir de (3.6) para obtener una única ecuación a partir de la cual se pueden hallar las resultantes de tensiones:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\bar{p}_z + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\int \bar{p}_x\, dx\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\int \bar{p}_y\, dy\right). \tag{3.9}$$

En esta ecuación de φ, los coeficientes del lado izquierdo son funciones conocidas de x e y, siendo únicamente funciones de la geometría de la cáscara, y de forma similar los términos de carga del lado derecho son funciones conocidas de x e y. La ecuación (3.9) es de hecho una ecuación diferencial parcial de segundo orden lineal estándar de φ.

Algunos resultados de la teoría matemática de este tipo de ecuaciones pueden utilizarse (como se mencionó brevemente en el capítulo 2) para establecer en términos generales el comportamiento físico de las cáscaras. En particular, los signos de los coeficientes del lado izquierdo dictan si el sistema es elíptico o hiperbólico. Los ejemplos numéricos ilustrarán el comportamiento individual, pero se puede señalar aquí que el coeficiente $\partial^2 z/\partial^2 y$, por ejemplo, que representa la tasa de variación de la pendiente de la cáscara en la dirección y, es, dentro de un múltiplo (variable), la curvatura de la cáscara en esa dirección. En efecto, si las direcciones x e y coincidieran en un punto determinado con las direcciones de la curvatura principal de la cáscara, el lado izquierdo de la ecuación (3.8) podría sustituirse por

$$\frac{1}{r_1} N_x + \frac{1}{r_2} N_y$$

que tiene una forma conocida (por ejemplo, la ecuación (2.11)). Si los radios vectores r_1 y r_2 se encuentran en el mismo lado de la cáscara (como ocurre en la Fig. 2.1), entonces $\partial^2 z/\partial y^2$ y $\partial^2 z/\partial x^2$ en la ecuación (3.9) serán del mismo signo, y la ecuación es elíptica. En el análisis de cáscaras la característica interesante de la solución de las ecuaciones elípticas es que las discontinuidades en las condiciones de contorno no se propagan lejos en la cáscara, sino que se extinguen al alejarse del borde.

Por el contrario, si r_1 y r_2 son de signo opuesto (como en la Fig. 2.6), entonces la ecuación (3.9) será hiperbólica, teniendo características reales a lo largo de las cuales se pueden propagar las discontinuidades. Tales discontinuidades ya se han encontrado en la bóveda de cañón en el capítulo 1, y un ejemplo más general servirá para ilustrar más el asunto.

Paraboloide hiperbólico

El sistema de cubierta de la Fig. 3.3 cuya ecuación es

$$z = \frac{x}{a}\,\frac{y}{b}\,h \tag{3.10}$$

es un ejemplo de paraboloide hiperbólico. La ecuación (3.9) se convierte en

$$\frac{2h}{ab}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \bar{p}_z - \frac{h}{ab}\,\left(y\bar{p}_x + x\bar{p}_y\right)\ . \tag{3.11}$$

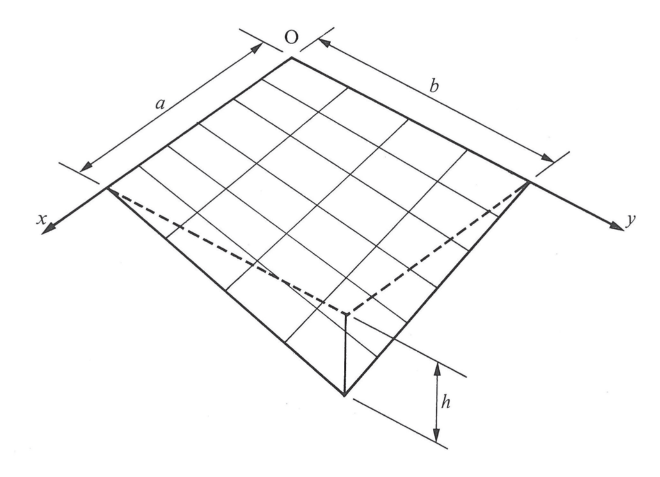


Fig. 3.3

Si sólo se consideran cargas verticales, entonces $\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$; además, $\bar{p}_z$ se tomará como constante (= w) para este ejemplo. (Si la dimensión h es pequeña comparada con a y b, entonces una carga vertical constante p_z representa bastante bien la carga de peso propio de una cáscara de espesor uniforme). La ecuación (3.11) se resuelve inmediatamente para dar

$$\varphi = \frac{ab}{2h}\ wxy + f_1\,(x) + f_2\,(y)\ , \tag{3.12}$$

con las correspondientes resultantes de tensiones proyectadas, a partir de las ecuaciones (3.6),

$$\bar{N}_{xy} = -\frac{ab}{2h} w \ ,$$

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \ , \qquad (3.13)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} ,$$

o, en la propia cáscara,

$$N_{xy} = -\frac{ab}{2h} w \ ,$$

$$N_x = \left(\frac{a^2 b^2 + h^2 y^2}{a^2 b^2 + h^2 x^2}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \ , \qquad (3.14)$$

$$N_y = \left(\frac{a^2 b^2 + h^2 x^2}{a^2 a^2 + h^2 y^2}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \ .$$

Las características reales del paraboloide hiperbólico de la ecuación (3.10) son las rectas x = const. e y = const., y las ecuaciones (3.13) ó (3.14) muestran inmediatamente la posibilidad de propagación de las tensiones a lo largo de estas líneas. Por ejemplo, supongamos que se imponen ciertas tensiones de contorno $\bar{N}_x$ a lo largo del borde $x = 0$ de la cáscara; estas tensiones dadas fijan de inmediato la función $\partial^2 f_2/\partial y^2$ en las ecuaciones (3.13). Entonces, a través de cualquier corte x = const. de la cáscara, aparecerán las mismas tensiones $\bar{N}_x = \partial^2 f_2/\partial y^2$; la distribución en los bordes se transmite sin cambios a través de la cáscara a lo largo de líneas paralelas al eje x.

Se puede concluir que si los apoyos de los bordes de la cáscara son tales que no pueden soportar resultantes de tensiones directas N_x y N_y, entonces N_x y N_y son cero en toda la cáscara. La resultante de tensiones de cortadura constante N_{xy} exigirá vigas de borde capaces de soportar las fuerzas totales mostradas en la Fig. 3.4(a); en esta figura se muestra la cáscara en equilibrio.

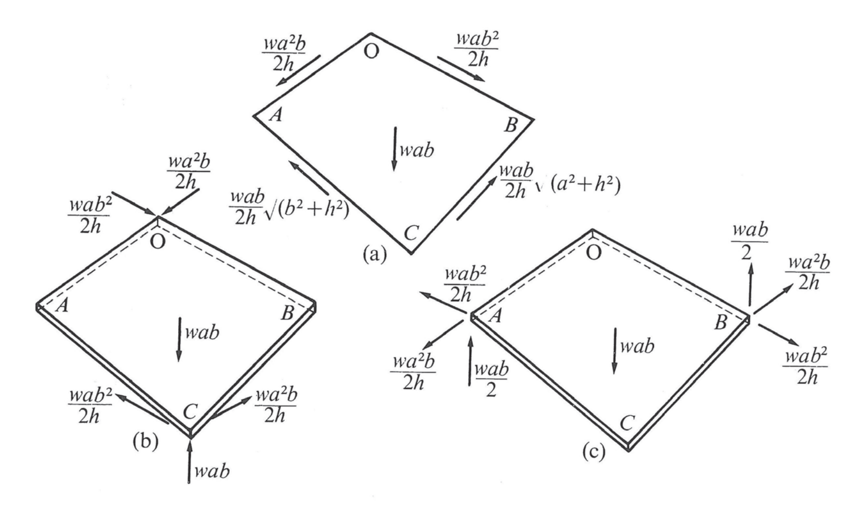


Fig. 3.4.

El sistema total, cáscara más vigas de borde, puede apoyarse de diversas maneras, como en la Fig. 3.4(b) ó (c). En la Fig. 3.4(b) se podrían ensamblar cuatro paneles de este tipo para cubrir un área de $2a \times 2b$, con soportes verticales en las cuatro esquinas *C* y tirantes entre los soportes para proporcionar las fuerzas horizontales en *C*. En la Fig. 3.4(c) se podría proporcionar un elemento de empuje a través de *AB* para soportar las fuerzas horizontales necesarias, dejando sólo las fuerzas verticales para ser transmitidas a los soportes externos en *A* y *B*.

Al igual que en el caso de la bóveda de cañón del capítulo 1, en la práctica surgen ciertos problemas derivados de las vigas de borde: una viga pesada debe hacerse autoportante de alguna manera, ya que la propia cáscara no suele ser capaz de proporcionar las reacciones necesarias. En la figura 3.4(c), el intento de soportar la viga *OB* mediante tensiones N_x conduce a dificultades con la viga *AC*, ya que estas tensiones se propagan sin cambios de un lado a otro de la cáscara. Por lo tanto, en la construcción práctica hay que prestar mucha atención a las vigas o diafragmas que se utilizan para soportar los bordes de un paraboloide hiperbólico.

Paraboloide de revolución

El paraboloide de revolución tiene curvaturas del mismo signo; la forma general es la esbozada en la Fig. 2.1, y la ecuación diferencial que gobierna la función de tensión φ es elíptica. Si la superficie de la cáscara viene dada por

$$z = \frac{1}{h}\left(x^2 + y^2\right) , \tag{3.15}$$

y si, de nuevo para simplificar, se supone una carga vertical uniforme de intensidad w, entonces la ecuación (3.9) se convierte en

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{wh}{2} . \tag{3.16}$$

Como ejemplo particular (de una estructura de cubierta que se ha utilizado en la práctica), se analizará la cáscara de forma triangular equilátera que se muestra en la Fig. 3.5. La cáscara se apoya en las tres esquinas y, como es habitual, hay que prever diafragmas o vigas de borde a lo largo de los tres bordes para soportar los cortantes pero no los empujes.

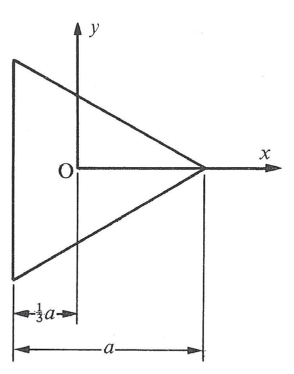


Fig. 3.5.

La solución puede examinarse a la inversa, postulando una función φ y deduciendo las resultantes de tensión correspondientes. La función

$$\varphi = -\frac{1}{8}\, wh\, \left[x^2 + y^2 + \frac{1}{a}\,(3xy^2 - x^3)\right] \tag{3.17}$$

satisface la ecuación diferencial parcial básica (3.16), y además asume un valor constante, $(-1/54)wa^2h$, a lo largo de cada uno de los tres lados de la cáscara de la Fig. 3.5. El hecho de que φ sea constante a lo largo del contorno implica que las derivadas parciales en la dirección del contorno son cero, de modo que las resultantes de tensiones normales en el borde también son cero (véanse las ecuaciones (3.6), en las que la tensión en la dirección x, por ejemplo, viene dada por la segunda diferencial parcial de φ con respecto a y). Utilizando las ecuaciones (3.6), las resultantes de tensiones se determinan como

$$\begin{aligned} \overline{N}_x &= -\frac{1}{4}\, wh\left(1 + \frac{3x}{a}\right), \\ \overline{N}_y &= -\frac{1}{4}\, wh\left(1 - \frac{3x}{a}\right), \\ \overline{N}_{xy} &= \frac{3}{4}\, wh\left(\frac{y}{a}\right), \end{aligned} \tag{3.18}$$

y se verá que N_x es cero, como se requiere, a lo largo del borde $x = -\frac{1}{3}a$. Estas expresiones para las resultantes de tensiones hacen que el cálculo práctico de una cáscara de hormigón armado sea sencillo.

Paraboloide elíptico

Como ejemplo final del análisis de cáscaras de forma general, se expondrá un desarrollo más completo para el paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{h_1} + \frac{y^2}{h_2} \tag{3.19}$$

utilizado para cubrir un área rectangular $a \times b$ (Fig. 3.6).

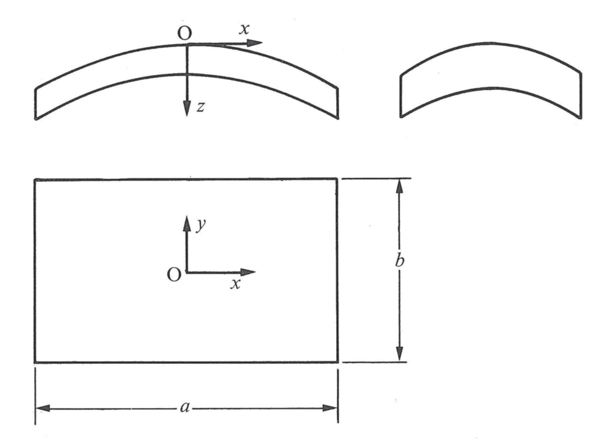


Fig. 3.6

La carga se tomará de nuevo como vertical y uniforme de intensidad w, por lo que la ecuación básica a resolver es

$$\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}\,w\,. \tag{3.20}$$

Los cuatro bordes de la cáscara estarán apoyados en vigas incapaces de soportar un empuje lateral, por lo que la solución debe satisfacer las condiciones

$$\begin{aligned} x &= \pm\tfrac{1}{2}a, \qquad N_x = 0 \quad \text{i. e.} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,,\\ y &= \pm\tfrac{1}{2}b, \qquad N_y = 0 \quad \text{i. e.} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Así, para ampliar la discusión de las condiciones de contorno para el paraboloide de revolución en la sección anterior, las ecuaciones (3.21) se satisfarán si φ es una función lineal de x ó y a lo largo de los bordes; sin ninguna pérdida de generalidad (ya que las segundas diferenciales están involucradas en la búsqueda de las resultantes de tensiones), φ puede tomarse como cero a lo largo de cada uno de los cuatro lados.

De las diversas formas en que puede establecerse la solución de la ecuación (3.20), la siguiente da los resultados en una forma conveniente, como se verá, para el cálculo numérico. En primer lugar, se observará que

$$\varphi_0 = \frac{wh_1}{4}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) \tag{3.22}$$

es una solución particular de la ecuación (3.20), y es, además, una solución para la que $\varphi_0 = 0$ para $y = \pm\frac{1}{2}b$.

Para la solución general de la ecuación homogénea, se supondrá la serie

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ sen } \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{3.23}$$

que también satisface la condición $\varphi_1 = 0$ para $y = \pm\frac{1}{2}b$ para cualquier valor de n. Si se sustituye la ecuación (3.23) en la ecuación homogénea (3.20), se verá que ésta se satisface término a término si cada función $f_n(x)$ se determina a partir de la ecuación ordinaria

$$\frac{1}{h_2}\frac{d^2 f_n}{dx^2} - \frac{1}{h_1}\frac{n^2\pi^2}{b^2} f_n = 0 \,, \tag{3.24}$$

esto es, si

$$f_n(x) = A_n \cosh \frac{n\pi x}{C} + B_n \text{ sen h } \frac{n\pi x}{C} \,, \tag{3.25}$$

donde A_n y B_n son las dos constantes de integración, y

$$C = b\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} . \tag{3.26}$$

Las funciones f_n deben ser simétricas en x para el problema de la Fig. 3.6, de modo que $B_n = 0$, y φ_1 en la ecuación (3.23) se ha establecido como

$$\varphi_1 = \sum A_n \cosh \frac{n\pi x}{C} \text{ sen } \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi y}{b} . \tag{3.27}$$

Por lo tanto, la solución completa de la ecuación (3.20) puede escribirse como

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \frac{wh_1}{4}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) + \sum A_n \cosh\frac{n\pi x}{C}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\ . \tag{3.28}$$

Tal y como se ha construido la solución, las condiciones de contorno $\varphi = 0$ para $y = \pm\frac{1}{2}b$ se satisfacen en la ecuación (3.28); quedan por satisfacer las condiciones $\varphi = 0$ para $x = \pm\frac{1}{2}a$. Para ello, la ecuación (3.22) puede escribirse en la forma

$$\varphi_0 = \frac{wh_1}{4}\cdot\frac{8b^2}{\pi^3}\sum\frac{1}{n^3}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\ , \tag{3.29}$$

de modo que la condición $\varphi = 0$ para $x = \pm\frac{1}{2}a$ se cumplirá término a término en la ecuación (3.28) si

$$A_n \cosh\frac{n\pi a}{2C} = -\frac{wh_1}{4}\cdot\frac{8b^2}{\pi^3}\cdot\frac{1}{n^3}\ . \tag{3.30}$$

Así, finalmente, la ecuación (3.28) queda como

$$\varphi = \frac{wh_1}{4}\left[\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) - \frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \frac{\cosh\frac{n\pi x}{C}}{\cosh\frac{n\pi a}{2C}}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\right], \tag{3.31}$$

y las resultantes de tensiones vienen dadas por

$$N_x = -\frac{wh_1}{2}\left(\frac{1 + (2x/h_1)^2}{1 + (2y/h_2)^2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum\frac{1}{n}\ \frac{\cosh\frac{n\pi x}{C}}{\cosh\frac{n\pi a}{2C}}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\right],$$

$$N_y = -\frac{2wh_2}{2}\left(\frac{1 + (2y/h_2)^2}{1 + (2x/h_1)^2}\right)^{1/2}\left[\sum\frac{1}{n}\ \frac{\cosh\frac{n\pi x}{C}}{\cosh\frac{n\pi a}{2C}}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\right],$$

$$N_{xy} = -\frac{2w}{\pi}\ (h_1\ h_2)^{1/2}\left[\sum\frac{1}{n}\ \frac{\text{sen}\,\text{h}\frac{n\pi x}{C}}{\cosh\frac{n\pi a}{2C}}\ \text{sen}\ \frac{n\pi}{2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi y}{b}\right]. \tag{3.32}$$

El comportamiento general de estas expresiones para las resultantes de tensiones se indica en la Fig. 3.7, en la que N_x y N_y se dibujan para la sección central $x = 0$, y N_{xy} se dibuja para el borde $x = \frac{1}{2}a$. Las series son rápidamente convergentes para formas razonables de la cáscara, excepto la de N_{xy} en la vecindad de una esquina; la resultante de tensiones de cortante se vuelve teóricamente infinita en las cuatro esquinas, y se debe proporcionar un refuerzo importante en estas regiones (bastante pequeñas) para resistir las tensiones resultantes en la cáscara.

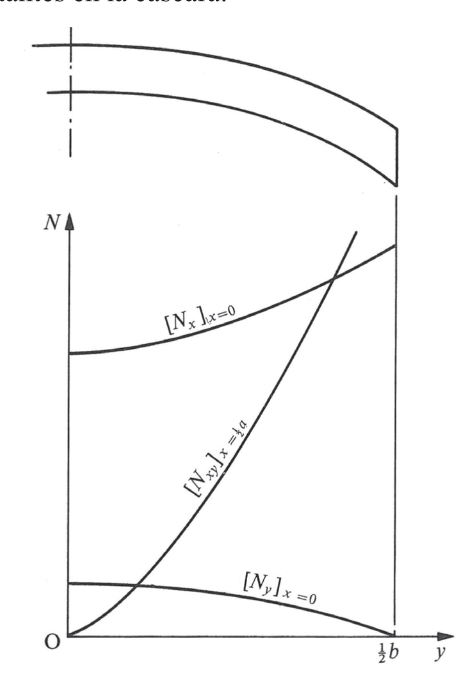


Fig. 3.7

Un ejemplo numérico servirá para confirmar la convergencia de las series, y también puede servir para ilustrar las comprobaciones que pueden hacerse sobre el equilibrio global de la cáscara. Si la ecuación de la superficie de la cáscara es

$$z = \frac{x^2}{200} + \frac{y^2}{100}, \tag{3.33}$$

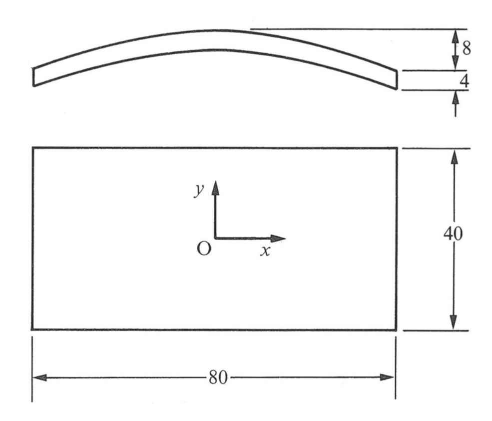


Fig. 3.8

y si la superficie cubierta es de 80 × 40 (todas las dimensiones están en metros) entonces

$$h_1 = 200\,, \quad a = 80\,,$$

$$h_2 = 100\,, \quad b = 40\,, \tag{3.34}$$

$$C = b\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} = 40\sqrt{2}\,.$$

La altura total de la cáscara es de 12 m, como se muestra en la Fig. 3.8. Si el espesor de esta cáscara de hormigón es de 0,1 m, el peso unitario w, incluyendo los acabados, puede ser de unos 3 kN/m². La primera de las ecuaciones (3.32) da el valor de N_x (en kN/m) a lo largo de la línea $x = 0$ como

$$[N_x]_{x=0} = -\frac{300}{(1+(y/50)^2)^{1/2}}$$

$$\left[1 - \frac{4}{\pi}\left\{\operatorname{sech}\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi y}{40} - \frac{1}{3}\operatorname{sech}\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi y}{40} + \cdots\right\}\right], \tag{3.35}$$

donde el segundo término de la serie ya puede despreciarse debido al pequeño valor $(0{,}850 \times 10^{-3})$ de $\frac{1}{3}\operatorname{sech}3\pi/\sqrt{2}$. El factor $(1 + (y/50)^2)^{1/2}$ representa la transformación de la resultante de tensiones proyectada $\bar{N}_x$ en N_x;

para $y = 20$ (el borde de la cáscara) este factor vale $\sqrt{1{,}16} = 1{,}077$, de modo que N_x y $\bar{N}_x$ difieren en muy poco. El valor de $\bar{N}_x$ para $x = 0$ viene dado muy aproximadamente por

$$[\bar{N}_x]_{x=0} = -300 \left(1 - 0{,}273 \cos \frac{\pi y}{40}\right), \tag{3.36}$$

y varía de −218 kN/m en el centro de la cáscara a −300 kN/m en el borde. El valor de $\bar{N}_y$ en el centro de la cáscara es de 41 kN/m. (Puede observarse que, a partir de la ecuación (3.20), $\bar{N}_x + 2\bar{N}_y = -300$, por lo que las características generales de la Fig. 3.7 se explican fácilmente.)

Si ahora se imagina que la cáscara se corta por sus vigas de borde y también se corta por la mitad a lo largo de $x = 0$, se puede estudiar su equilibrio global. La figura 3.9 muestra en planta las fuerzas de borde que actúan sobre la mitad de la cáscara.

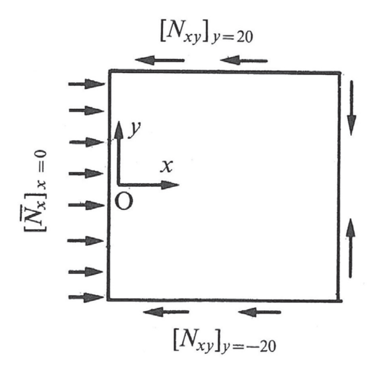


Fig. 3.9

A lo largo de la línea central $x = 0$ actúa la resultante de tensiones $[\bar{N}_x]_{x=0}$, cuyo valor viene dado por la ecuación (3.36). A lo largo de los bordes $y = \pm 20$, las resultantes de tensiones de cortante deben estar contrarrestadas por las vigas de los bordes; análogamente, resultantes de tensiones de cortante actúan en el borde $x = 40$. Es evidente que, para el equilibrio en la dirección x, las fuerzas $\bar{N}_x$ dadas por la ecuación (3.36) sumadas desde $y = -20$ hasta $y = 20$ deben ser iguales a las fuerzas aportadas por N_{xy} a lo largo de los dos bordes. De hecho, el valor de N_{xy} en $y = \frac{1}{2}b$ viene dado por la tercera de las ecuaciones (3.32) como

$$\left[N_{xy}\right]_{y=\frac{1}{2}b} = -\frac{2w}{\pi}\,(h_1\,h_2)^{1/2}\ \left[\sum\frac{1}{n}\ \text{sen}^2\,\frac{n\pi}{2}\ \sec\ \text{h}\ \frac{n\pi a}{2C}\ \text{sen h}\ \frac{n\pi x}{C}\right], \tag{3.37}$$

y la integración desde $x = 0$ hasta $x = \frac{1}{2}a$ da como resultado que la fuerza total de cortante transmitida a lo largo del borde es

$$\frac{2w}{\pi^2}\,bh_1\ \sum\frac{1}{n^2}\ \text{sen}^2\,\frac{n\pi}{2}\left(1-\sec\ \text{h}\ \frac{n\pi a}{x}\right). \tag{3.38}$$

La integración de $\overline{N}_x$ a través de la cáscara confirma esta expresión general; para los valores numéricos actuales, el cortante total del borde es

$$\frac{48000}{\pi^2}\left[\left(1-\sec\ \text{h}\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots\right], \tag{3.39}$$

donde el término 1/9 en realidad está multiplicado por (1−sech $3\pi/\sqrt{2}$), que es aproximadamente 391/392, el término 1/25 por (1 − sech$5\pi/2$), y así sucesivamente. La serie (1 + 1/9 + 1/25 + 1/49 +...) suma $\pi^2/8$, y la expresión (3.39) da una fuerza total de 4957 kN que actúa sobre cada medio borde de la cáscara (Fig. 3.10).

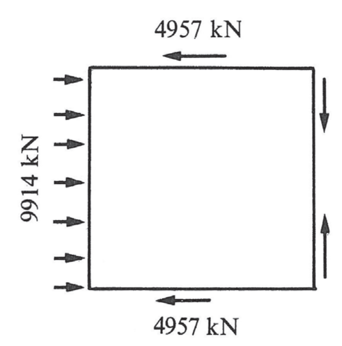


Fig. 3.10

Aunque el valor de N_{xy} se hace infinito justo en la esquina de la cáscara (para $x = \frac{1}{2}a$ en la ecuación (3.37)), el aumento no es excesivamente rápido. El valor *medio* de N_{xy} en los 40 m de longitud del borde es de 4957/40

ó unos 120 kN/m; la Tabla 3.1 muestra los valores de N_{xy} en y = 20 para distintos valores de x.

x(m)	0	10	20	30	39	39·5	39·6	39·7	39·8	39·9	40
N_{xy}(kN/m)	0	34	81	164	478	572	602	641	695	789	∞

Tabla 3.1

La última esquina de la cáscara trabaja a cortante casi puro, lo que implica tensiones de compresión y de tracción iguales; hay que prever un refuerzo de tracción a través de las esquinas, pero la Tabla 3.1 muestra que incluso el último cubo de 0,1 m de la cáscara (se supuso que la cáscara tenía un espesor de 0,1 m) no está sometido a una tensión de compresión excesiva. (Además del refuerzo de tracción, una cáscara real se regruesaría en las esquinas.)

Como se ha mencionado anteriormente, la tercera de las ecuaciones (3.32) no es conveniente para el cálculo de N_{xy} para valores de x cercanos á $\frac{1}{2}a$ y para $y=\frac{1}{2}b$. La ecuación puede escribirse de forma alternativa

$$N_{xy} = -\frac{2w}{\pi}\ (h_1\ h_2)^{1/2} \left[\sum \frac{1}{n} \frac{\operatorname{sen h} \dfrac{n\pi y}{d}}{\cos h\ \dfrac{n\pi b}{2d}} \sin \frac{n\pi}{2}\ \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \right], \tag{3.40}$$

donde

$$d = a\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2}, \tag{3.41}$$

y, escribiendo

$$\frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\ \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{4} \log \left(\sec \frac{\pi x}{a} + \tan \frac{\pi x}{a}\right)^2, \tag{3.42}$$

la ecuación (3.40) se puede refundir en la forma, para y =½b,

$$N_{xy} = -\frac{w}{2\pi}\ (h_1\ h_2)^{1/2} \left[\log \left(\sec \frac{\pi x}{a} + \tan \frac{\pi x}{a}\right)^2 \right.$$
$$\left. -4 \sum \left(1 - \tan\ h\ \frac{n\pi b}{2d}\right) \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\ \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\right]. \tag{3.43}$$

Para el presente ejemplo numérico, sólo es significativo el primer término de la serie infinita; para $n = 3$ ó más, la tangente hiperbólica es muy cercana a la unidad. La ecuación (3.43) se utilizó en la construcción de la Tabla 3.1.

Volviendo a la consideración del equilibrio global de la cáscara, supongamos que se intenta soportar el sistema completo de la cubierta, es decir, la cáscara junto con sus vigas de borde, mediante reacciones puramente verticales en las cuatro esquinas. Si se considera el equilibrio horizontal de la media cubierta completa (Fig. 3.11), se observa que las vigas de borde deben estar en tracción en la mitad del vano ($x = 0$), soportando cada una de ellas 4957 kN (inducidos, por supuesto, por las fuerzas cortantes transmitidas a las vigas de borde por la cáscara).

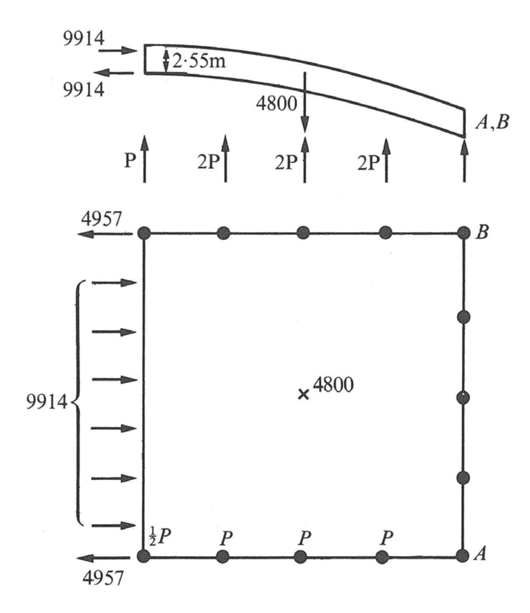


Fig. 3.11

La resultante de tensiones N_x actúa sobre la superficie curvada de la cáscara, y un cálculo numérico muestra que la línea de acción de la fuerza total de la cáscara 9914 kN se encuentra a unos 2,55 m por encima de las vigas de borde, como se muestra en la Fig. 3.11. El par resultante, $9914 \times 2{,}55 \simeq 25000$ kNm es insuficiente para equilibrar el momento del peso de la cáscara alrededor de la línea de arranque AB, es decir, $4800 \times 20 \simeq 96000$ kNm. Es

preciso disponer fuerzas de apuntalamiento en las vigas de borde para mantener el equilibrio.

Hasta ahora no ha habido ambigüedades en el análisis. La ecuación básica de la membrana (3.20) conduce a las resultantes de tensiones de las ecuaciones (3.32), que a su vez conducen a la fuerza total de 9914 kN transmitida por la cáscara a través del plano $x = 0$. Si los apoyos de las esquinas no pueden soportar la carga horizontal, entonces las vigas de borde deben estar en tracción, y el equilibrio exige entonces un apoyo adicional a las vigas de borde. Sin embargo, si se dispone más de un soporte, las cargas de apuntalamiento no están determinadas estáticamente. Por ejemplo, si se colocan soportes a intervalos de 10 m, como se muestra en la Fig. 3.11, y si se supone que todas las fuerzas de apuntalamiento tienen el mismo valor P, entonces los momentos sobre AB para la media cubierta dan $160P = (96000 - 25000)$, ó $P = 450$ kN aproximadamente. Sin embargo, ésta es sólo una solución de equilibrio entre un número infinito. Mientras que las fuerzas en la propia cáscara se han determinado de forma inequívoca, las fuerzas reales de apuntalamiento en las vigas de borde serán función de la rigidez a la flexión de dichas vigas, de las condiciones de apoyo de los soportes individuales y, en definitiva, de todos los factores que deben tenerse en cuenta en un análisis elástico completo.

En estas condiciones, es razonable y acorde con los principios de la teoría plástica, tomar para el cálculo un conjunto de fuerzas de apuntalamiento que satisfaga únicamente el equilibrio, en lugar de un conjunto derivado de un análisis elástico complejo que se base en otras suposiciones que pueden tener poca relación con el comportamiento de la cáscara real. En el capítulo 4 se hace un análisis más formal de los principios del cálculo plástico en el presente contexto.

Sin embargo, desde cualquier punto de vista que se estudie el problema, el análisis muestra inequívocamente que los bordes de la cáscara, si no están soportados por diafragmas continuos, deben estar provistos de vigas de borde capaces de aceptar fuerzas de cortante, y estas vigas de borde deben estar soportadas verticalmente. Si se repite el análisis numérico anterior con la cáscara cortada en la otra dirección, se comprueba que también se necesitan fuerzas de apuntalamiento a lo largo de los bordes cortos; las

fuerzas de apuntalamiento son del mismo orden (450 kN, según el número y la separación de los soportes) que las de los bordes largos. La suma de todas las fuerzas verticales muestra entonces que los puntales en A y B deben soportar muy poca fuerza. Por lo tanto, no es posible soportar el sistema de cubierta sólo en las cuatro esquinas, sino que el peso total de la cáscara debe ser soportado más o menos uniformemente (dependiendo de nuevo de la separación de los soportes en el diseño real) alrededor de los cuatro bordes.

Los bordes de la propia cáscara están en compresión en direcciones paralelas al borde, además de estar sujetos a cortante; a lo largo del borde $y = \frac{1}{2}b$, por ejemplo, hay tensiones de compresión N_x, y N_{xy} tiene valores significativos, como ya se ha comentado; el valor de N_y se ha hecho cero como parte del cálculo. Sin embargo, la viga de borde en $y = \frac{1}{2}b$ está a tracción (4957 kN), y ahí tenemos de nuevo un ejemplo de incompatibilidad de deformaciones que puede provocar flexiones y fisuras, y contra las que hay que prever en la práctica un refuerzo. No obstante, cabe señalar que los cables de pretensado pueden introducirse con bastante facilidad en las grandes vigas de borde; esto inducirá tensiones de compresión en el hormigón, mientras que las vigas de borde en su conjunto seguirán en un estado general de tracciones. Esto no sólo evitará el agrietamiento, sino que el postesado de las vigas de borde puede inducir un movimiento ascendente de toda la cáscara, lo que se ha utilizado en la práctica para facilitar todo el proceso de descimbramiento de la cubierta desde su encofrado.

Parte II
La cáscara de fábrica

4
La teoría de arcos

Principios plásticos

Todo el trabajo descrito en la Parte I de este libro se ha dirigido a encontrar cómo se distribuyen las fuerzas primarias en las cáscaras en respuesta a cargas dadas. Se ha supuesto que las cáscaras no se deforman a flexión, de modo que se han determinado los patrones de fuerzas dictados por la geometría de la superficie media de la cáscara concreta considerada. Ha sido conveniente trabajar en términos de resultantes de tensiones; las tensiones correspondientes pueden utilizarse directamente para el proyecto. Por ejemplo, se puede evaluar la tendencia a la inestabilidad por pandeo o, en el caso del hormigón armado, un material débil a tracción, se puede determinar la disposición de las armaduras de refuerzo.

La segunda parte de este libro se ocupa de estructuras ejecutadas con materiales incapaces de soportar fuerzas de tracción. El arquetipo de este material es la piedra, aparejada formando una fábrica de sillería ensamblada sin mortero, y que depende de su propio peso para mantener una forma estructural coherente capaz de soportar grandes cargas superpuestas. De hecho, resulta útil pensar en estructuras sencillas realizadas de este modo —por ejemplo, en un arco de dovelas construido con forma semicircular a partir de varias piedras idénticas (Fig. 4.1)— y estos modelos se utilizarán para ilustrar los principios básicos.

Sin embargo, la teoría es de hecho más general, y se aplica también a materiales ensamblados al azar, y al hormigón, siempre que se den tres supuestos básicos sobre el comportamiento del material.

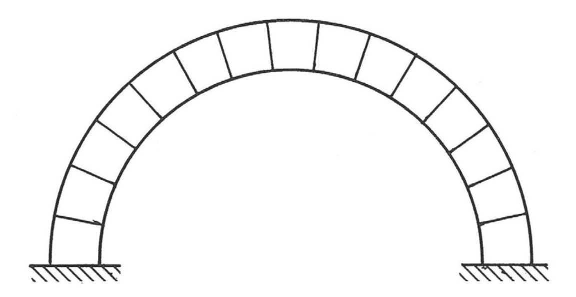


Figura 4.1

Estas suposiciones son las siguientes:

(i) *El fallo por deslizamiento es imposible.* Se supone que el material está ensamblado de tal manera que la fricción entre las distintas partes, o el entrelazamiento de estas, impedirá la desintegración por deslizamiento. Así, las dovelas del arco de la Fig. 4.1 pueden asentarse sin mortero; sin embargo, el peso de las dovelas no sólo permitirá que el arco se mantenga en pie, sino que podrá soportar cargas superpuestas. De forma más general, la estructura estará sometida a un sistema de tensiones de compresión "de fondo", que pueden ser muy pequeñas en la práctica, pero que serán suficientes para mantener las partes componentes en su sitio.

(ii) *El material tiene una resistencia a compresión infinita*. Esta suposición implica que las tensiones son tan bajas que no hay peligro de aplastamiento del material. Como se vio en la discusión de los órdenes de magnitud en el capítulo 1, esta suposición, aunque obviamente insegura, no es en absoluto irreal para una amplia gama de estructuras del tipo considerado aquí. Incluso las cubiertas de cáscara muy grandes, como el paraboloide elíptico analizado al final del capítulo 3, tienen un nivel de tensiones generalmente bajo. Es posible realizar un análisis más refinado en el caso inusual de que las tensiones medias se eleven a una fracción sensible de la resistencia de rotura a compresión; en general, los errores introducidos por esta suposición son pequeños.

(iii) *El material es incapaz de soportar tracciones*. Esta suposición es evidentemente "segura", y de hecho puede ser demasiado conservadora en determinadas circunstancias. Sin embargo, en el caso de las construcciones de fábrica o de hormigón en masa, es razonable y prudente; se supone que el mortero entre dovelas es muy débil (aunque la propia piedra pueda tener cierta resistencia a la tracción), y se supone que una cáscara de hormigón está agrietada *ab initio*.

Si estos tres supuestos se cumplen rigurosamente, todo el análisis sobre el comportamiento de las estructuras construidas con dicho material entra dentro de la disciplina de la teoría plástica (o análisis límite). En particular, y de la mayor importancia, se aplica el teorema del límite inferior (teorema de la seguridad). Dicho de forma sencilla, si se puede encontrar cualquier estado de equilibrio satisfactorio para la estructura (y en el siguiente párrafo se da una definición de satisfactorio), esto es una prueba completa de que dicha estructura es segura. La potencia de este teorema radica en el hecho de que el estado de equilibrio que se analiza no tiene por qué ser el estado de equilibrio real; basta con una solución satisfactoria.

Por satisfactorio se entiende simplemente que el conjunto de fuerzas en equilibrio satisface las hipótesis sobre el comportamiento básico del material. Es decir, las tensiones de compresión son bajas y no se desarrollan tracciones en ninguna parte de la estructura. (Por tanto, las resultantes de tensiones de las ecuaciones (1.13) (Fig. 1.7) para la cúpula semiesférica no son satisfactorias, ya que se desarrollan tensiones anulares de tracción para ángulos φ mayores de 51,82°. La cúpula de fábrica se estudia en detalle en el capítulo 5.) El teorema de la seguridad, basado en un estado de equilibrio satisfactorio, ha sido siempre apreciado por el proyectista práctico, aunque éste no haya sido capaz de formular el teorema en términos de principios plásticos. El proyectista está acostumbrado a realizar cálculos para obtener sistemas de equilibrio de fuerzas razonables en los que basar su proyecto. Al hacer estos cálculos para una estructura hiperestática, se ve obligado a hacer ciertas suposiciones para poder avanzar, y la naturaleza de estas suposiciones merece ser examinada.

Para evaluar el estado real de un arco, por ejemplo (como podría ser el arco de fábrica de dovelas de la Fig. 4.1, pero en general cualquier forma de arco con tres grados de hiperestatismo), el calculista debe hacer ciertas suposiciones sobre los apoyos, por ejemplo que son rígidos, o que ceden de forma elástica conocida bajo carga. Con algunas suposiciones precisas de este tipo, se puede realizar un análisis elástico de la estructura (o incluso un análisis inelástico, si se pueden acomodar las complicaciones de las propiedades reales de los materiales). El proyectista habrá obtenido un conjunto de fuerzas compatible con sus supuestos y este conjunto de fuerzas servirá como un estado de equilibrio satisfactorio. Sin embargo, describir este estado como el estado real es concluir demasiado del análisis.

En particular, el paso del tiempo hará que las suposiciones del proyectista, aunque sean ciertas en un principio, se vuelvan falsas; uno de los estribos del puente asentará, quizás, y un asiento muy pequeño (pequeño, esto es, en el sentido estructural), puede alterar considerablemente el estado de la estructura. Esto es tan cierto en el caso de una estructura de acero como en el de un arco de hormigón armado o de fábrica; las tensiones medidas en una estructura real son a menudo muy diferentes de las calculadas, precisamente porque se descubre que la estructura real no obedece a las suposiciones del calculista. Sin embargo, no parece razonable suponer que un asentamiento de unos pocos milímetros, que puede tener un gran efecto teórico sobre la magnitud de las tensiones en una estructura, y que de hecho puede alterar en algún sentido el estado real de la estructura, pueda tener de hecho algún efecto medible sobre la resistencia final de esa estructura.

Esta reconfortante creencia intuitiva se basa en la experiencia de la construcción de estructuras usuales ejecutadas con materiales habituales. Los requisitos estructurales para que esta creencia se fundamente más científicamente pueden formularse, y dan la base de los métodos plásticos; implican la noción de *ductilidad*, en el sentido técnico de la palabra, es decir, la capacidad de la estructura para acomodarse a pequeños cambios externos en la geometría. Así, sería peligroso utilizar vidrio o hierro fundido como material de construcción; ambos son resistentes, pero podrían romperse debido a los movimientos de sus soportes. Por el contrario, el acero o el hormigón armado tienen las cualidades necesarias de ductilidad; lo mismo

ocurre con los materiales (como la fábrica y el hormigón en masa) que son resistentes a la compresión y débiles a la tracción. Para estos materiales se aplican los teoremas plásticos, y las creencias intuitivas del proyectista sobre la seguridad de sus estructuras se ven confirmadas por el teorema del límite inferior (teorema de la seguridad).

El comportamiento dúctil de una estructura de fábrica o de hormigón en masa puede ilustrarse con el ejemplo del arco de dovelas. Un arco de este tipo empujará de forma constante contra sus apoyos, y es posible que, con el paso del tiempo, estos apoyos se hayan separado ligeramente de su posición original. La pregunta que hay que responder es cómo el arco de dovelas puede aumentar su propia luz hasta igualar la de los apoyos, dado que las piedras no pueden deslizarse unas sobre otras, y que no pueden desarrollarse fuerzas de tracción entre las piedras. Para un arco con la forma que se dibuja en la Fig. 4.2(a), el movimiento implicará la articulación de una dovela sobre la siguiente, formándose tres articulaciones como se muestra en el dibujo.

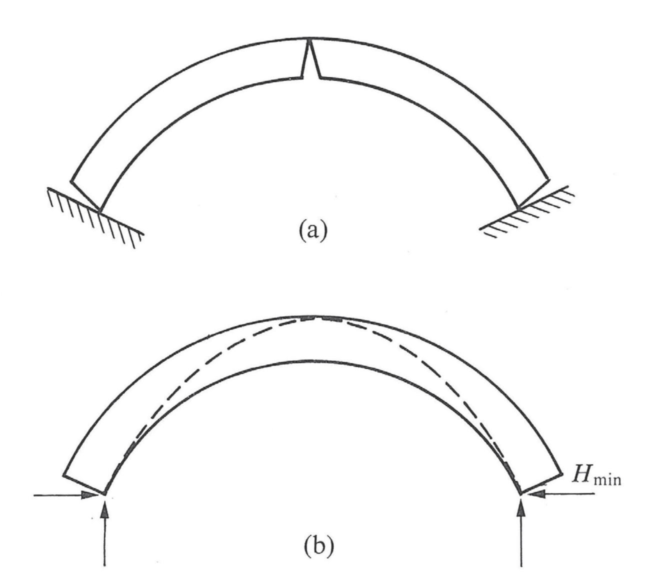


Figura 4.2

Desde el punto de vista de las nociones convencionales de indeterminación estática, el arco de la Fig. 4.2(a) se ha convertido en un arco triarticulado isostático, cuyo equilibrio puede estudiarse componiendo las fuerzas y tomando momentos. Para una carga dada (por ejemplo, el peso propio del arco), se puede encontrar de inmediato el empuje en el apoyo H_{min} (Fig. 4.2(b)); el empuje entre las dovelas no tiene más remedio que transmitirse entre los puntos de articulación, de modo que la posición de la línea de empujes, mostrada con una línea discontinua en la Fig. 4.2(b), queda fijada de forma inequívoca.

De este sencillo problema ilustrativo del arco pueden extraerse varias conclusiones generales. Las *articulaciones* mostradas en la Fig. 4.2(a) se manifestarían en la práctica como un fino agrietamiento de las juntas de mortero (aunque la elasticidad general del material podría hacer que el agrietamiento fuera apenas visible). De forma más general, una estructura no dovelada (es decir, un conjunto más aleatorio de fábrica u hormigón) se agrietaría en respuesta a ligeras deformaciones impuestas desde el exterior, pero dicho agrietamiento no indicaría que la estructura estuviera a punto de colapsar, ni que estuviera en ningún sentido en un estado peligroso. Las tres articulaciones del arco de dovelas no hacen más que transformar el arco en una forma bien conocida y perfectamente satisfactoria, la del arco triarticulado, plenamente capaz de resistir cargas exteriores. Es esta misma transformación de una estructura redundante (hiperestática) en una estáticamente determinada (isostática) la que demuestra la seguridad del arco; la línea de empujes de la Fig. 4.2(b), aunque no sea necesariamente la línea de empujes real, representa un estado de equilibrio que satisface el teorema de la seguridad.

La segunda conclusión se refiere a la forma de la línea de empujes esbozada en la Fig. 4.2(b). Es evidente que esta línea no coincide en absoluto con la línea media del arco. Para satisfacer el teorema de la seguridad no es necesario establecer un conjunto de fuerzas en la línea central de una estructura bidimensional; todo lo que se necesita es un conjunto de fuerzas que se encuentren dentro de la masa del material, como la línea de empujes de la Fig. 4.2(b) que se encuentra dentro del espesor del arco. De hecho, al principio del capítulo 1 se señaló que un arco extremadamente

delgado de una forma determinada sólo puede soportar un único conjunto de fuerzas; el problema de encontrar una línea de empujes de una forma determinada para equilibrar un conjunto de cargas dado es, en general, insoluble.

Por el contrario, sí es posible que una cáscara tridimensional extremadamente delgada satisfaga el equilibrio para un gran número de casos de carga; la Parte I de este libro ha tratado exclusivamente de tales soluciones. Dado que este tipo de soluciones son posibles, en el análisis y proyecto de cáscaras es habitual concentrar la atención matemática en la superficie media. En cierto sentido, en el resto de este libro lo que se hace es examinar algunas consecuencias de liberarse de la tiranía de la superficie media. Los dos capítulos restantes ofrecen soluciones en las que se permite que las fuerzas de equilibrio se alejen de la superficie media, quedando confinadas simplemente entre las superficies superior e inferior de la cáscara (del mismo modo que la línea de empujes bidimensional se encuentra dentro del material del arco).

La estabilidad de la fábrica

Hay otras cuestiones de interés en el análisis de los arcos que pueden examinarse aquí antes de hablar de la cáscara propiamente dicha. El empuje sobre los apoyos de la Fig. 4.2(b) se ha denominado H_{min}, y corresponde en efecto al menor valor del empuje necesario para mantener el arco como estructura, es decir, para garantizar la estabilidad del arco. El empuje mínimo se produce cuando los estribos se separan y el arco se agrieta como se muestra en la figura; hay, en correspondencia, un empuje máximo, desarrollado cuando (debido quizás a algún movimiento externo del suelo) los estribos se aproximan entre sí. Para acomodarse a una luz ligeramente reducida, el arco debe agrietarse como en la Fig. 4.3(a); se establece una nueva posición de la línea de empujes (Fig. 4.3(b)) y se puede calcular el valor correspondiente H_{max}.

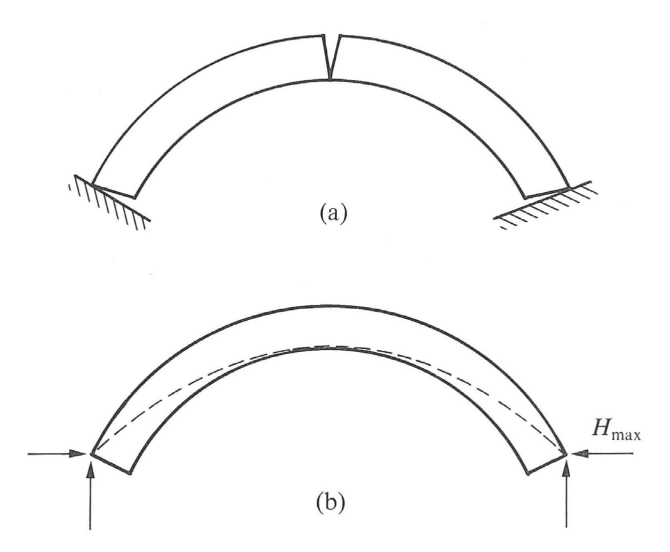


Figura 4.3

Por lo tanto, aunque no tenga sentido intentar determinar el estado real de la estructura, sí puede ser posible asignar límites (como aquí H_{max} y H_{min}) dentro de los cuales deben estar ciertas magnitudes estructurales para que la estructura se mantenga en pie. Así pues, quizá de forma inesperada, el examen de los estados de equilibrio puede llevar a la posibilidad de hacer afirmaciones bastante precisas sobre una estructura, y el teorema de la seguridad surge como una herramienta bastante más precisa de lo que cabría suponer.

En resumen, la estabilidad de una estructura de fábrica estará garantizada si se puede demostrar que existe al menos una forma en la que las cargas aplicadas pueden transmitirse a los cimientos mediante un conjunto de fuerzas que se encuentran totalmente dentro de la fábrica. Se trata de una afirmación sobre el equilibrio de la estructura en relación con su geometría y, dicho así, es evidente que desaparecen al menos algunas de las dificultades que experimenta un proyectista acostumbrado a los conceptos elásticos. Por poner un solo ejemplo, pero de gran importancia, el intento de describir el estado real de una estructura implica inmediatamente la consi-

deración de las imperfecciones, que pueden producirse internamente, como pequeños desajustes geométricos, o externamente como asientos de los apoyos, como ya se ha comentado. Las imperfecciones de este tipo, que no tienen ningún efecto sensible en la geometría general de la estructura, no pueden tener ningún efecto sensible en las ecuaciones básicas de equilibrio y, por tanto, no pueden afectar en absoluto a la estabilidad básica de la estructura en su conjunto.

Las afirmaciones positivas sobre la estabilidad de una estructura pueden complementarse con la consideración de las condiciones en las que ésta pierde la estabilidad. El arco semicircular de la figura 4.4, por ejemplo, que soporta su propio peso y también una carga puntual *P* que aumenta lentamente, colapsará por la formación de cuatro articulaciones; el mecanismo de colapso es el que conoce el proyectista plástico de estructuras de acero. Nótese que el colapso del arco simple *exige* cuatro articulaciones; como se ha visto, la presencia de tres articulaciones sólo transforma una estructura hiperestática en una isostática.

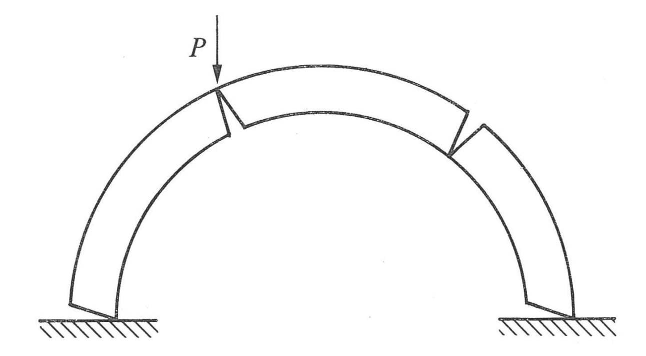


Figura 4.4

Ahora bien, hay muchas estructuras para las que no es posible encontrar ningún mecanismo de colapso. Para el arco rebajado de la figura 4.5(a), por ejemplo, no hay ninguna combinación de articulaciones en el intradós y el trasdós que permita la formación de un mecanismo.

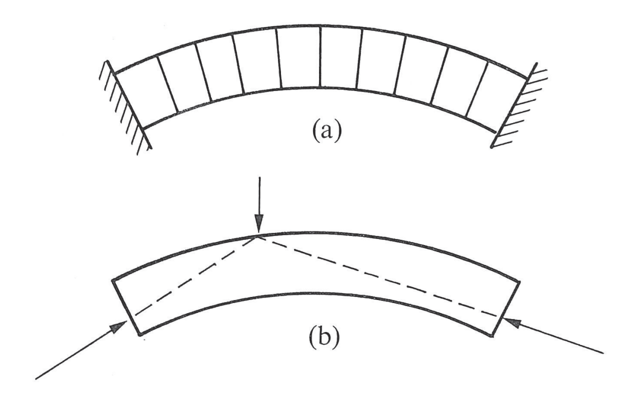


Figura 4.5

Esta afirmación es la contrapartida de la afirmación positiva sobre estabilidad derivada del teorema de la seguridad; en la Fig. 4.5(b) se observa que una carga puntual vertical, dirigida hacia abajo, colocada en cualquier punto del arco puede ser soportada por líneas de empujes que se encuentran en el interior de la fábrica (evidentemente, esto no es cierto en el arco semicircular de la Fig. 4.4).Se puede concluir que, dentro de los supuestos de comportamiento de los materiales expuestos anteriormente, y siempre que los apoyos se mantengan firmes, el arco rebajado de la Fig. 4.5 puede soportar cualquier combinación de carga vertical sin colapsar.

Arcos de espesor mínimo

Aunque el arco semicircular de la Fig. 4.4 acabará colapsando si el valor de *P* aumenta lo suficiente, parece razonable suponer que un arco de las dimensiones generales mostradas será estable bajo su propio peso. La Fig. 4.6 muestra el arco con una posible línea de empujes que equilibra el peso propio, y se verá que, en efecto, esta línea de empujes se encuentra confortablemente dentro de la fábrica.

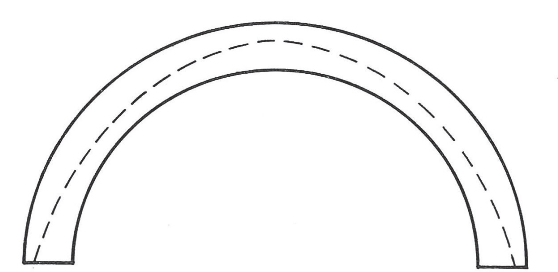


Figura 4.6

Puede reducirse el espesor del arco sin violar esta condición, pero es evidente que hay un límite más allá del cual esta reducción es imposible. La figura 4.7(a) muestra, aproximadamente a escala, el arco semicircular de menor espesor posible; la línea de empujes toca el trasdós en la clave y el intradós en puntos de los riñones, y pasa por el trasdós en los arranques. El mecanismo de colapso correspondiente (con cinco articulaciones en lugar de cuatro, debido a la simetría del arco) se muestra en la Fig. 4.7(b).

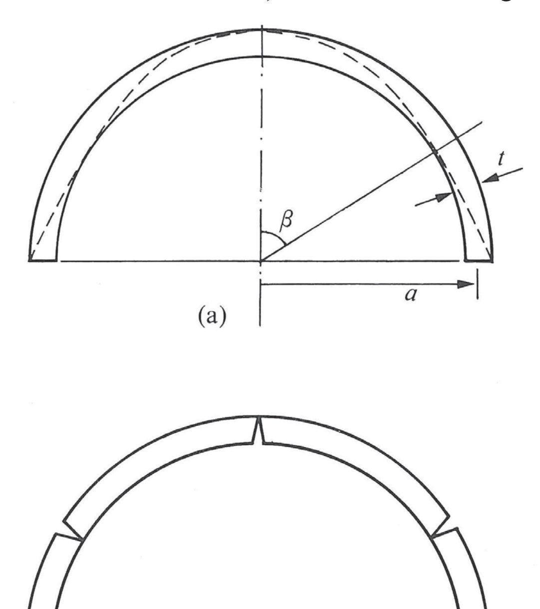


Figura 4.7

El problema principal (que se planteó hace 250 años y se resolvió eficazmente en ese momento[1]) es determinar la relación de espesores t/a del arco en esta situación límite; un problema intermedio es determinar las secciones transversales (definidas por β en la Fig. 4.7(a)) en las que se forman las articulaciones en el intradós. Estos problemas son puramente geométricos y pueden resolverse considerando el equilibrio estático de partes del arco entre los puntos de articulación de la Fig. 4.7(b). Si se considera que el arco es lo suficientemente delgado como para que la masa se distribuya a lo largo de la línea media de radio a, entonces el valor correcto de β resulta de la solución de la ecuación

$$\beta \ \cot \ \beta \left[\frac{2\beta\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\,\cos^2\beta + \operatorname{sen}\beta}{2\beta\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\,\cos^2\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\beta}\right] = \frac{\pi}{2}\ . \tag{4.1}$$

Esta ecuación puede resolverse numéricamente para obtener $\beta = 58°\ 49'$; la relación de espesor requerida puede calcularse entonces a partir de

$$\frac{t}{a} = 2\ \frac{(\beta - \operatorname{sen}\beta)\,(1 - \cos\beta)}{\beta\,(1 + \cos\beta)}\ . \tag{4.2}$$

Por último, la componente horizontal del empuje sobre el apoyo para un arco de anchura unidad viene dada por

$$H = wa\ \beta\ \cot\beta\ , \tag{4.3}$$

donde w (= ρt) es el peso de una unidad de superficie del arco (como para las cáscaras en los capítulos anteriores).

---

[1] P. Couplet. De la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1729: 79-117; 1730: 117-141.

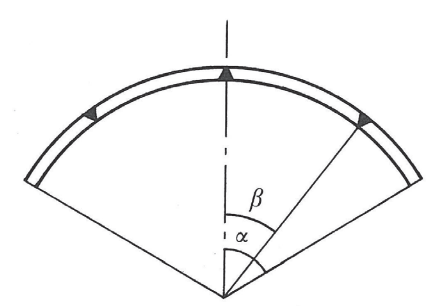


Figura 4.8

El análisis puede repetirse para un arco circular de ángulo de apertura 2α (Fig. 4.8). Las ecuaciones (4.2) y (4.3) no se modifican, pero el valor de β se determina a partir de una nueva ecuación (4.1), en la que en el lado derecho, $\frac{1}{2}\pi$, se sustituye por la expresión $\alpha \cot \frac{1}{2}\alpha$. Para α pequeño, la solución de la ecuación revisada (4.1) es aproximadamente $\beta = \alpha/\sqrt{2}$, y de hecho la relación β/α se sitúa entre 0,71 y 0,65 en todo el rango $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Cuando β es pequeño, se verá en la ecuación (4.2) que el valor de t/a es proporcional aproximadamente a β^4, por lo que los arcos de pequeño ángulo de apertura pueden, en teoría, ser muy delgados. La figura 4.9 muestra el espesor mínimo requerido del arco para diversos valores de α, y el valor correspondiente de H se muestra en la figura 4.10.

El valor de H es, por supuesto, el valor del empuje en la clave del arco; para pequeños ángulos de apertura α, para los que el espesor del arco es muy pequeño y la línea de empujes (siempre limitada a estar dentro del espesor) tiene una curvatura aproximadamente igual a la del arco, el valor de H es muy parecido a wa, la resultante de tensiones de membrana de la teoría de cáscaras. Sin embargo, a medida que el arco se hace más grueso, la curvatura de la línea de empujes en la clave será mayor que la de la línea media del arco (véase la figura 4.7(a)), y el valor de H disminuirá.

Los valores límite de la figura 4.9 representan arcos circulares idealizados que se mantienen en pie bajo su propio peso. Si los arcos se hacen ligeramente más delgados, colapsarán inmediatamente. A la inversa, los

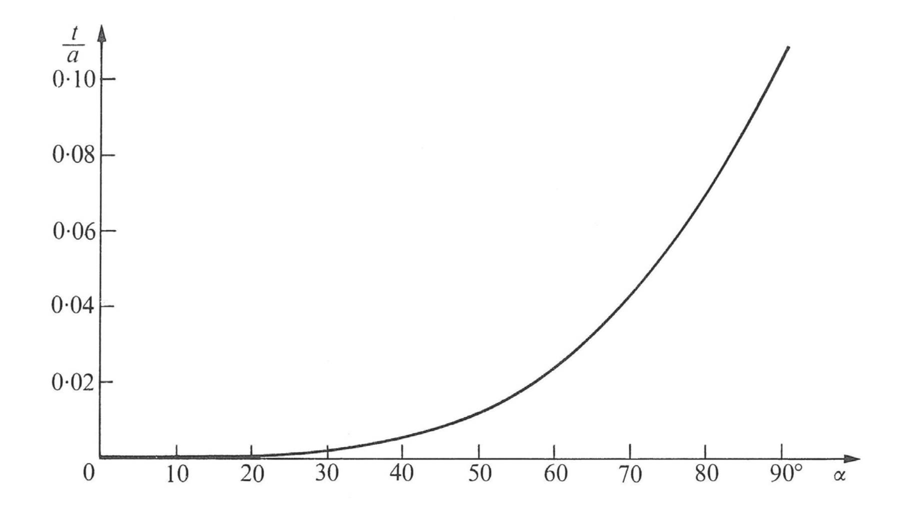


Figura 4.9

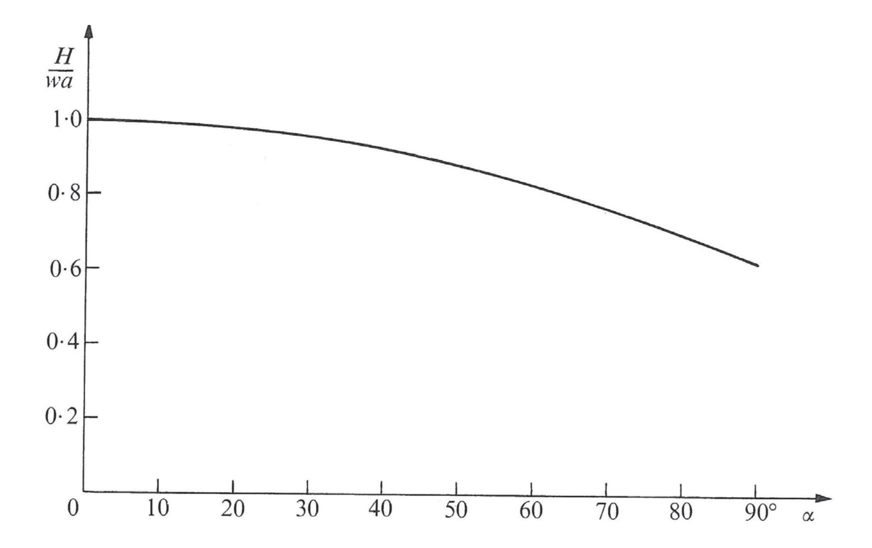


Figura 4.10

arcos ligeramente más gruesos no colapsarían bajo sus propios pesos. Sin embargo, es evidente que un arco muy delgado, aunque tal vez sea teóricamente estable, estará a merced de sobrecargas accidentales, que alterarán la forma de la línea de empujes de modo que ésta ya no pueda estar contenida dentro de la fábrica. Por otra parte, las pequeñas imperfecciones geométricas pueden distorsionar la forma del arco de manera que ya no contenga la línea de empujes. (En este segundo caso, las deformaciones estructurales ya no pueden considerarse pequeñas en comparación con las dimensiones de la estructura, por lo que uno de los supuestos básicos de la teoría plástica deja de ser válido, y el teorema de la seguridad pierde validez.) Estas consideraciones conducen a la idea de un coeficiente geométrico de seguridad, que podría expresarse como la relación entre el espesor real del arco y el mínimo teóricamente requerido para la estabilidad.

No es necesario ahora seguir con la idea de coeficiente geométrico de seguridad, pero cabe señalar que en la práctica los espesores son, por supuesto, considerablemente mayores que el mínimo. Los empujes reales sobre los apoyos (o en la clave) podrían entonces ser muy inferiores a los valores indicados en la figura 4.10. Como ejemplo numérico, se calcularán los empujes mínimos sobre los apoyos (como en la Fig. 4.2(b)) para un arco que tenga t/a = 0,02. De la Fig. 4.9 se desprende que un arco de este espesor puede utilizarse, teóricamente, hasta un ángulo de apertura total 2α de algo menos de 120°. Para α inferior a unos 38°, las tres articulaciones asociadas al desarrollo del empuje mínimo se sitúan como se muestra en la Fig. 4.2(a). Para α mayor que este valor, las articulaciones se alejan de los apoyos y, de hecho, se bloquean a 38°, la línea de empujes toca el intradós en esta sección, y luego pasa de nuevo a la fábrica. En efecto, a medida que α se aproxima a los 60°, la línea de empujes se saldrá del trasdós, y un arco práctico deberá tener un respaldo exterior (Fig. 4.11) si ha de mantenerse en pie.

Los empujes mínimos asociados a varios valores de α para el arco con t/a = 0,02 se muestran en la Fig. 4.12(a), y a efectos del capítulo 6, esta curva se ha redibujado en relación a senα en la Fig. 4.12(b).

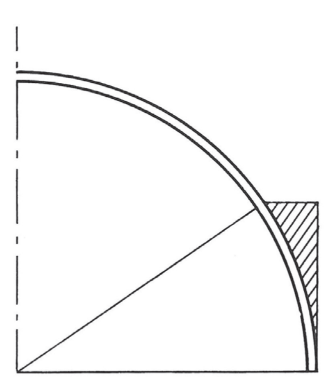


Figura 4.11

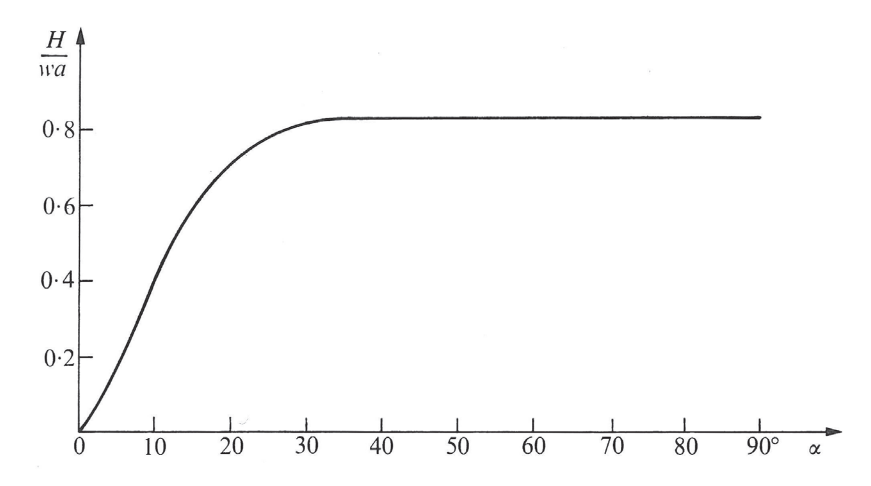


Figura 4.12 (a)

Por lo tanto, incluso para este problema tan simple del arco circular, la negativa a basar el análisis en la línea media circular ha llevado a la posibilidad de una amplia gama de valores para las cantidades estructurales involucradas. En primer lugar, no hay solución posible si se idealiza el arco por su línea media; aunque esta idealización parezca muy razonable para un arco circular que tenga $t/a = 0{,}02$, como en el ejemplo que acabamos de comentar, la línea de empujes para la carga de peso propio no es un círculo, y por tanto no puede coincidir en absoluto con el arco idealizado.

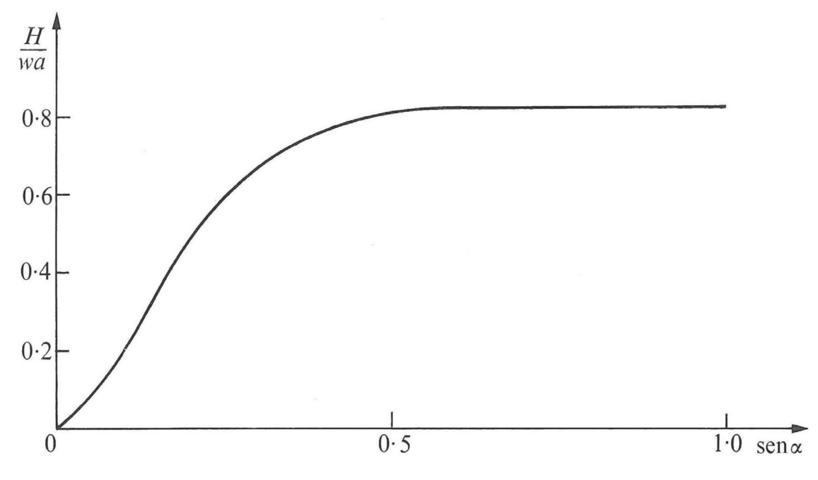


Figura 4.12 (b)

En segundo lugar, se observará que los empujes mínimos registrados en la Fig. 4.12(a) para ángulos de apertura pequeños difieren muy considerablemente de los correspondientes a los arcos de espesor mínimo (Fig. 4.10); esta cuestión se trata más adelante en el capítulo 6. Por supuesto, el valor del empuje puede exceder de *wa*; para α inferior a unos 11°, el valor de H_{max} (Fig. 4.3) para un arco con t/a = 0,02 puede aumentar sin límite.

El análisis se ha expuesto con respecto al arco circular, pero las ideas de articulación, por un lado, y de líneas de empujes, por otro, se aplican a arcos de cualquier forma. Por ejemplo, se pueden calcular los valores del empuje mínimo para arcos apuntados; las soluciones obtenidas pueden no tener una expresión "exacta", pero la determinación numérica de las líneas de empujes para un arco con una distribución de masa dada es fácil y rápida. Como se verá, el arco bidimensional es uno de los componentes estructurales clave de las cáscaras sin tracciones que se estudian en los capítulos 5 y 6.

5
Cubiertas simétricas

En este capítulo se examinarán tres cáscaras de revolución: la aguja cónica, la bóveda de abanico (una cáscara con curvatura gaussiana negativa) y la cúpula. Todas ellas se han utilizado como elementos estructurales en edificios de fábrica, y los análisis se realizarán partiendo del supuesto de que el material no puede soportar tracciones. En el caso de la aguja, sin embargo, se utilizará el análisis de cáscaras del capítulo 2, y la suposición de ausencia de tracciones se comprobará simplemente examinando las expresiones de las resultantes de tensiones.

En el estudio de la bóveda de abanico se hará un uso más extenso de la hipótesis de ausencia de tracciones; aunque la teoría de cáscaras sigue siendo la base del análisis, se comprueba que se pueden generar perfiles que satisfagan las hipótesis, en lugar de soluciones obtenidas para una forma de cubierta determinada.

Por último, la teoría de cáscaras convencional se abandonará en el estudio de la cúpula, y el análisis se basará en los resultados para el arco bidimensional que se han estudiado en el capítulo 4. Además, la necesidad de simetría también puede abandonarse, y se verá que se pueden encontrar soluciones para cúpulas incompletas.

La aguja de fábrica

La aguja de fábrica suele ser de sección octogonal, por lo que la membrana convencional correspondiente para el análisis de la cáscara sería una pirá-

mide de ocho caras planas. Si se estudia dicha cáscara mediante la teoría de la membrana, es evidente que la única carga aceptable estará en los planos de las caras; además, habrá discontinuidades de la solución en las uniones de las caras planas.

Sin embargo, un cono circular recto puede estar contenido dentro de la pirámide octogonal, siempre que el espesor de la fábrica no sea demasiado pequeño; si se puede establecer una solución de cáscara de membrana para el cono, entonces los teoremas plásticos del capítulo 4 garantizarán que la pirámide real sea al menos tan segura como el cono hipotético. La condición para que un círculo de radio R pueda estar contenido dentro de un octógono con una pared de espesor t es que $R\ (1 - \cos 22½°) < t$, ó $t/R > 0{,}0761$, y esta condición suele cumplirse incluso en agujas reales muy esbeltas.

Para el cono de semiángulo β (Fig. 2.8) las ecuaciones (2.36) y (2.37) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}\,(sN_s) + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial\theta} - N_\theta = -sp_s\,, \\ &\frac{\partial}{\partial s}\,(sN_{s\theta}) + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + N_{s\theta} = -sp_\theta\,, \\ &N_\theta = sp_n \tan\beta\,, \end{aligned} \qquad (5.1)$$

(véanse las ecuaciones (2.43) para el caso especial de la carga de viento). Así, para el caso de carga de peso propio de intensidad uniforme w por unidad de superficie, para el que $p_s = w\cos\beta$, $p_\theta = 0$, $p_n = -\,w\operatorname{sen}\beta$, las ecuaciones (5.1) pueden resolverse para dar

$$\begin{aligned} N_s &= -\,\frac{1}{2}\,ws\,\sec\beta\,, \\ N_\theta &= -\,ws\,\operatorname{sen}^2\beta\,\sec\beta\,, \\ N_{s\theta} &= 0\,. \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Para β pequeño, es evidente que N_s es la resultante de tensiones más grande; tanto N_s como N_θ son de compresión en toda la aguja.

En el capítulo 2 ya se ha considerado un análisis simplificado del efecto del viento sobre una aguja cónica; los resultados de las ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.45) se recogen aquí:

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{12}\, ps\, \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\beta}\,(1 - 3\operatorname{sen}^2\beta)\,, \\ N_\theta &= -\frac{1}{2}\, ps\, \cos\theta\, \operatorname{sen}\beta\,, \\ N_{s\theta} &= \frac{1}{6}\, ps\, \operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como era de esperar, la resultante de tensiones longitudinal N_s es de tracción en la generatriz de barlovento, $\theta = 0$; para β pequeño, el valor de N_s vuelve a ser dominante.

Si se hubiera considerado la aguja como un voladizo, entonces la teoría simple de flexión habría dado una resultante de tensiones máxima debida al viento de valor $ps/12\beta$, donde se ha hecho la aproximación $\operatorname{sen}\beta = \beta$, etc., para una aguja esbelta. Con la misma aproximación, la resultante de tensiones de compresión debida al peso propio viene dada por la primera de las ecuaciones (5.2) y vale $\frac{1}{2}ws$. Así pues, para una aguja esbelta, la tracción se evitará si, aproximadamente

$$p < 6w\beta\ , \tag{5.4}$$

independientemente de la altura de la aguja.

Una aguja muy esbelta podría tener una fábrica de sólo 120 mm de espesor, con un semiángulo β tan pequeño como 5° (es decir, $\beta = 0{,}0873$).El peso propio w para una piedra de 20 kN/m^3 sería, por tanto, de 2,4 kN/m^2, y la desigualdad (5.4) indica que $p = (6)(2{,}4)(0{,}0873) \simeq 1{,}25$ kN/m^2 es la mayor presión unitaria del viento que la aguja puede soportar sin que se produzcan tracciones. La mera aparición de tracciones no implica, por su-

puesto, el colapso; de hecho, el valor de p debe ser $12w\beta$, el doble del que implica la desigualdad (5.4), para que la aguja vuelque como un cono rígido. No obstante, una presión de viento unitaria de 1,25 kN/m² es un valor que un calculista moderno bien podría utilizar, y una aguja con las dimensiones utilizadas en este ejemplo parece ser la más esbelta que aún sobrevive.

El caso $p = 6w\beta$ puede examinarse por su interés; la introducción de este valor en las ecuaciones (5.3), y su adición a las ecuaciones (5.2), conduce a las resultantes de tensiones totales

$$N_s = -\frac{1}{2}\, ws\ (1-\cos\theta)\,,$$
$$N_\theta = -\beta^2 ws\ (1+3\cos\theta)\,, \qquad (5.5)$$
$$N_s = -\beta ws\ \operatorname{sen}\theta\,,$$

donde una vez más se han realizado las aproximaciones sen$\beta = \beta$ y demás. Así, para la cáscara de 120 mm para la que w = 2,4 kN/m², y para s = 15 m (por ejemplo),

$$N_s = -18\ (1-\cos\theta)\,,$$
$$N_\theta = -36\beta^2\ (1+3\cos\theta)\,, \qquad (5.6)$$
$$N_{s\theta} = -36\beta\ \operatorname{sen}\theta\ \text{kN/m}\ .$$

Tomando de nuevo β como 0,0873 (5°), y trabajando directamente en tensiones en lugar de resultantes de tensiones,

$$\sigma_s = -150\ (1-\cos\theta)\,,$$
$$\sigma_\theta = -2{,}3\ (1+3\cos\theta)\,, \qquad (5.7)$$
$$\sigma_{s\theta} = -26{,}2\ \operatorname{sen}\theta\ \text{kN/m}^2\ .$$

Como era de esperar, estas tensiones son muy bajas; los valores alrededor de la aguja, así como los valores máximos y mínimos, se indican (en kN/m²) en la Tabla 5.1.

θ^o	σ_s	σ_θ	$\sigma_{s\theta}$	σ_{max}	σ_{min}
0	0	-9	0	0	-9
30	-20	-8	-13	0	-28
60	-75	-6	-23	1	-82
90	-150	-2	-26	2	-154
120	-225	1	-23	3	-227
150	-280	4	-13	5	-281
180	-300	5	0	5	-300

Tabla 5.1

Como se ve, se desarrollan débiles tensiones de tracción, debido a la pequeña tensión anular de tracción σ_θ unida a la tensión de cortante $\sigma_{s\theta}$ inducida por el viento. Por lo tanto, en sentido estricto, el análisis no sería válido para un material incapaz de soportar tracciones, y hay que buscar una solución alternativa. La forma en que podría construirse tal solución es similar a la de la cúpula, tratada más adelante en este capítulo, y no se discutirá aquí. De hecho, las débiles tensiones de tracción de la Tabla 5.1 podrán desarrollarse casi con toda seguridad en cualquier aguja real construida.

El análisis simple de membrana también permite estudiar las vibraciones de las agujas. Las oscilaciones de una aguja pueden ser auto-excitadas por la acción de un viento constante, o pueden ser excitadas por el toque de las campanas (particularmente en Inglaterra, donde el gusto por las secuencias matemáticas más que por la melodía puede llevar, en los cambios de toque, a una serie muy regular de impulsos; si la frecuencia de estos impulsos está cerca de la frecuencia natural de la torre más la aguja, entonces se producen grandes oscilaciones).

Se supondrá que la aguja se mueve horizontalmente en movimiento armónico simple de amplitud α y frecuencia natural ω_0^2. Así, la aceleración de cada punto de la aguja es $-\alpha\,\omega_0^2$ sen $\omega_0 t$, y la fuerza de d'Alembert sobre un elemento de área unidad es

$$\frac{waw_0^2}{g}\operatorname{sen} w_0 t = f, \text{ digamos}. \tag{5.8}$$

Por lo tanto, los componentes de la carga pueden tomarse como

$$\begin{aligned} p_s &= f\cos\theta \ \operatorname{sen}\beta\,, \\ p_\theta &= -f\operatorname{sen}\theta\,, \\ p_n &= f\cos\theta\ \cos\beta\,, \end{aligned} \tag{5.9}$$

y las ecuaciones (5.1) pueden resolverse para obtener

$$\begin{aligned} N_s &= -\frac{1}{3}fs\ \cos\theta\ \operatorname{cosec}\beta\,, \\ N_\theta &= fs\ \cos\theta\ \operatorname{sen}\beta\,, \\ N_{\theta s} &= \frac{2}{3}fs\ \operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Estas resultantes de tensiones son similares en forma y magnitud relativa a las debidas al viento, ecuaciones (5.3); el valor de f dado por la ecuación (5.8) varía con el tiempo entre límites positivos y negativos iguales.

Si de nuevo se utiliza una teoría simple para β pequeños, y se ignoran las tracciones débiles, la condición para la tensión cero en $\theta = 0, \pi$ es que

$$\frac{1}{3}\frac{s}{\beta}\ |f| < \frac{1}{2}ws\,,$$

esto es,

$$a < \frac{3}{2}\beta\frac{g}{w_0^2}\,. \tag{5.11}$$

Este resultado es independiente del espesor y la altura de la aguja, pero cuanto mayor sea el semiángulo β, mayor será la amplitud α de la oscilación que se puede tolerar. Es poco probable que la frecuencia de oscilación sea superior a 2 Hz ni inferior a unos ½ Hz, es decir, ω_0 estará aproximadamente entre π y 4π. La desigualdad (5.11) da las correspondientes amplitudes máximas para una aguja con β = 0,0873 como 130 mm y 8 mm, siendo la amplitud máxima para una frecuencia de 1 Hz de unos 30 mm.

Por último, como curiosidad estructural, que no carece de aplicación práctica, puede considerarse el caso de una aguja inclinada. Si el eje del cono está inclinado con un ángulo α respecto a la vertical en el plano vertical $\theta = 0$, las componentes de la carga debidas al peso propio pueden escribirse

$$p_s = w\,(\cos\alpha\ \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\cos\theta)\ ,$$

$$p_\theta = w\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\theta\ , \qquad (5.12)$$

$$p_n = -w\,(\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta\cos\theta)\ .$$

Las ecuaciones (5.1) pueden resolverse una vez más para obtener

$$N_s = -\frac{1}{2}ws\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\ \cos\theta\right)\ ,$$

$$N_\theta = -ws\ (\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta\ \tan\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta\cos\theta)\ , \qquad (5.13)$$

$$N_{s\theta} = -\frac{2}{3}ws\ \ \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\theta\ .$$

Para α y β pequeños, el valor de N_s es, como siempre, dominante, y se verá que N_s es de compresión siempre que

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} > \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\ ,$$

esto es,

$$\tan\alpha < \frac{3}{2}\tan\beta\ . \qquad (5.14)$$

Así, una aguja de ángulo $2\beta = 13{,}5°$ puede inclinarse unos 10° antes de que se desarrollen tracciones a lo largo de una generatriz (Fig. 5.1).

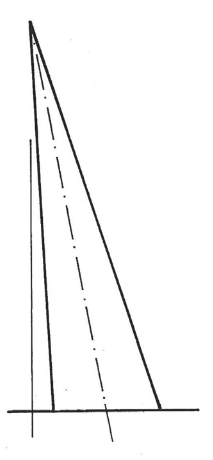


Figura 5.1

Este resultado, que podría parecer sorprendente, se debe al bajo centro de gravedad de una cáscara cónica, y se confirma mediante un análisis sencillo, tratando la aguja como un voladizo mediante la teoría de flexión ordinaria. La aguja puede inclinarse dos veces más antes de volcar.

La bóveda de abanico

En la figura 5.2(a) se ha dibujado una cáscara completa de revolución con curvatura gaussiana negativa; esta cáscara se cortará posteriormente en dos por un plano vertical que pasa por el eje, y la media cáscara resultante se utilizará como modelo matemático de la bóveda de abanico. Las ecuaciones generales (2.19) pueden utilizarse para establecer los valores de las resultantes de tensiones de membrana. Sin embargo, sólo se tratará la condición de carga simétrica de peso propio, para la cual $N_{\theta\varphi} = 0$, y las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse directamente.

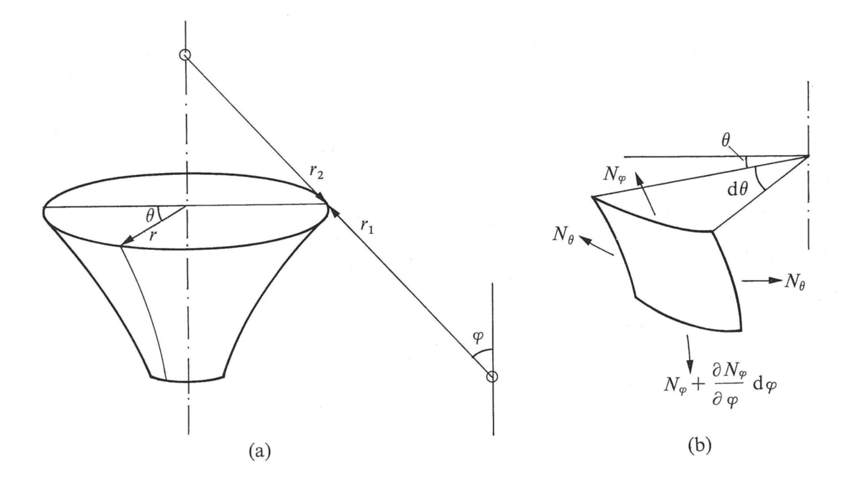


Figura 5.2

En la Fig. 5.2(a) la curvatura local del meridiano se mide como se muestra, de modo que la ecuación de Codazzi

$$\frac{d}{d\varphi}(r_2 \ \text{sen}\varphi) = -r_1 \ \cos\varphi \ , \tag{5.15}$$

tiene un signo negativo en comparación con la ecuación (2.3). La distancia *r* al eje de un punto de la cáscara viene dada, como es habitual, por

$$r = r_2 \ \text{sen}\varphi \ . \tag{5.16}$$

En ausencia de las resultantes de tensiones de cortante, las dos ecuaciones de equilibrio se convierten en

$$\frac{d}{d\varphi}\left(r \ \ N_\varphi\right) + r_1 \ N_\theta \cos\varphi = -wr\, r_1 \,\text{sen}\,\varphi \ ,$$

y (5.17)

$$\frac{N_\theta}{r_2} = \frac{N_\varphi}{r_1} + w\cos\varphi \ ,$$

donde, como es habitual, w es el peso por unidad de superficie de la cáscara. Si se elimina N_θ,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(r\ N_\varphi\ \text{sen}\,\varphi\right) = -wr\,r_1\ , \tag{5.18}$$

que puede compararse con la ecuación (2.20), en la que $U = rN_\varphi \text{sen}\varphi$.

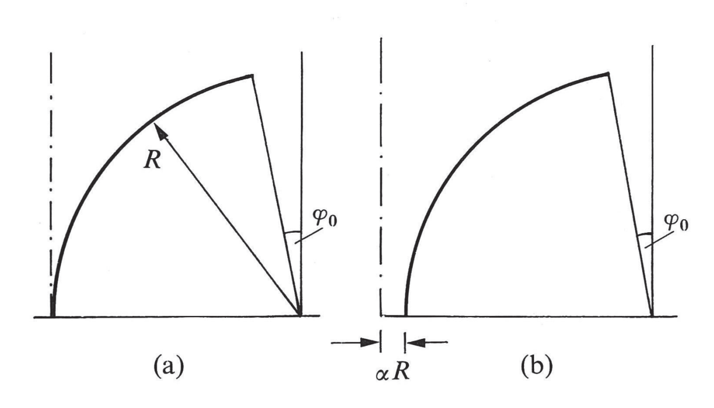


Figura 5.3

En primer lugar se estudiará la solución para un perfil circular (Fig.5.3) (se supone que la cáscara aún está completa y todavía no se ha cortado por la mitad). En la Fig. 5.3(a) el meridiano circular toca el eje, de modo que la cáscara se convierte en un punto, y hay que esperar que las resultantes de tensiones sean infinitas; esto no es un inconveniente grave en la práctica, ya que, como se verá, una cáscara real se fusionará con otros elementos estructurales antes que el ángulo meridiano φ alcance el valor ½π. Para la Fig. 5.3(a) $r_1 = R =$ const., y las ecuaciones (5.15) y (5.16) dan $r_2 = R\,(\text{cosec}\varphi - 1)$, $r = R\,(1 - \text{sen}\varphi)$; la ecuación (5.18) puede entonces integrarse para dar

$$N_\varphi = -wR\ \frac{(\varphi + \cos\varphi + C)}{\text{sen}\,\varphi\ \ (1 - \text{sen}\,\varphi)}\ , \tag{5.19}$$

donde C es una constante de integración. La segunda de las ecuaciones (5.17) da entonces

$$N_\theta = -wR\left[\frac{(\varphi + \cos\varphi + C)}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{\cos\varphi\,(1-\operatorname{sen}\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\right]. \qquad (5.20)$$

El examen de las expresiones (5.19) y (5.20) muestra que no hay solución general para $\varphi_0 = 0$ en la Fig. 5.3(a), debido a los ceros en los denominadores. Para la cáscara cortada en φ_0, se supondrá primero que el borde libre $\varphi = \varphi_0$ no está sometido a ninguna fuerza exterior, es decir, que la cáscara es independiente. Así, N_φ en $\varphi = \varphi_0$ debe ser cero, y la ecuación (5.19) da $C = -\varphi_0 - \cos\varphi_0$. Si se introduce este valor en las ecuaciones (5.19) y (5.20), se pueden calcular las resultantes de tensiones; la Tabla 5. 2 da los valores para $\varphi_0 = 10°$.

($\alpha = 0$, $\phi_0 = 10^\circ$, $N_\phi = 0$ en $\phi = \phi_0$)

ϕ°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
N_ϕ/wR	0	-0·57	-0·92	-1·32	-1·98	-3·34	-7·12	-27·5	-∞
N_θ/wR	4·68	0·71	-0·05	-0·31	-0·41	-0·44	-0·44	-0·42	-0·41

Tabla 5.2

Se obtienen resultados muy similares para el perfil de la Fig. 5.3(b), en el que se supone que la cáscara se funde en una columna de radio medio αR. En la Tabla 5.3 se indican los valores de las resultantes de tensiones para $\alpha = 0{,}05$.

En la Tabla 5.3 la resultante de tensiones meridianas ya no se hace infinita, pero el patrón general es el mismo en ambas tablas 5.2 y 5.3. En particular, mientras que N_φ, es siempre de compresión, la resultante de tensiones anular N_θ es de tracción en el borde superior de la cáscara, y las tracciones

se mantienen hasta aproximadamente φ = 30°, una situación que no es admisible.

Por lo tanto, se buscará una nueva solución para la que la tensión anular sea en todas partes de compresión, y se utilizará la condición de contorno $N_\theta = 0$ en $\varphi = \varphi_0$ (más adelante se discute cómo podría realizarse dicha condición en la práctica).

(α = 0·05, ϕ_0 = 10°, N_ϕ = 0 en $\phi = \phi_0$)									
$\phi°$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
N_ϕ/wR	0	-0·57	-0·92	-1·26	-1·79	-2·71	-4·40	-7·34	-9·62
N_θ/wR	4·97	0·77	-0·03	-0·31	-0·43	-0·47	-0·48	-0·48	-0·48

Tabla 5.3

La ecuación (5.20) para la cáscara que se apoya en un punto da entonces

$$C = \text{sen}\,\varphi_0\ \cos\varphi_0\,(1 - \text{sen}\,\varphi_0) - \varphi_0 - \cos\varphi_0\ , \tag{5.21}$$

y el nuevo sistema de tensiones se da en la Tabla 5.4, de nuevo para φ_0 = 10°.

(α = 0, ϕ_0 = 10°, N_θ = 0 en $\phi = \phi_0$)									
$\phi°$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
N_ϕ/wR	-0·99	-1·19	-1·49	-1·94	-2·77	-4·56	-9·61	-37·0	-∞
N_θ/wR	0	-0·50	-0·62	-0·65	-0·65	-0·63	-0·60	-0·57	-0·55

Tabla 5.4

El patrón es muy parecido para la cáscara apoyada en una columna, Tabla 5.5.

($\alpha = 0{\cdot}05$, $\phi_0 = 10^o$, $N_\theta = 0$ en $\phi = \phi_0$)

ϕ^o	10	20	30	40	50	60	70	80	90
N_ϕ/wR	-0·99	-1·20	-1·44	-1·83	-2·48	-3·65	-5·85	-9·68	-12·6
N_θ/wR	0	-0·52	-0·64	-0·68	-0·68	-0·67	-0·65	-0·63	-0·63

Tabla 5.5

Las soluciones de las Tablas 5.4 y 5.5 tienen la propiedad requerida de que las tensiones son en todas partes de compresión, y resulta evidente al comparar las dos tablas que la parte superior de la cáscara, hasta alrededor de 30° ó 40°, no se ve afectada por las condiciones de apoyo en la base. Sin embargo, se verá que se requiere una carga de compresión externa en el borde libre de la cáscara, $\varphi = \varphi_0$, para producir la tensión $N_\varphi = -0{,}99wR$. Esto implica que, para una bóveda de abanico completa, los abanicos adyacentes deben apoyarse los unos en los otros; los pinjantes, las pesadas claves y, en general, el material de los tímpanos entre los abanicos, deben proporcionar la componente vertical de esta carga de borde. Más adelante en esta sección se ofrecen algunos ejemplos de cálculos.

Si la cáscara completa se corta en dos mitades iguales, una de las cuales se muestra en la figura 5.4, el sistema de tensiones de la Tabla 5.4 (o de la Tabla 5.5) será un sistema de equilibrio para la cáscara, siempre que se introduzcan las cargas exteriores adecuadas. La media cáscara de la figura 5.4 tiene que mantener el equilibrio general; por ejemplo, la carga puntual en la base (proporcionada por la columna o el muro de soporte) debe ser igual al peso de la media cáscara junto con las componentes verticales de la carga de borde N_φ en $\varphi = \varphi_0$. Estas cargas de borde también tienen componentes horizontales, que deben ser equilibradas por fuerzas horizontales

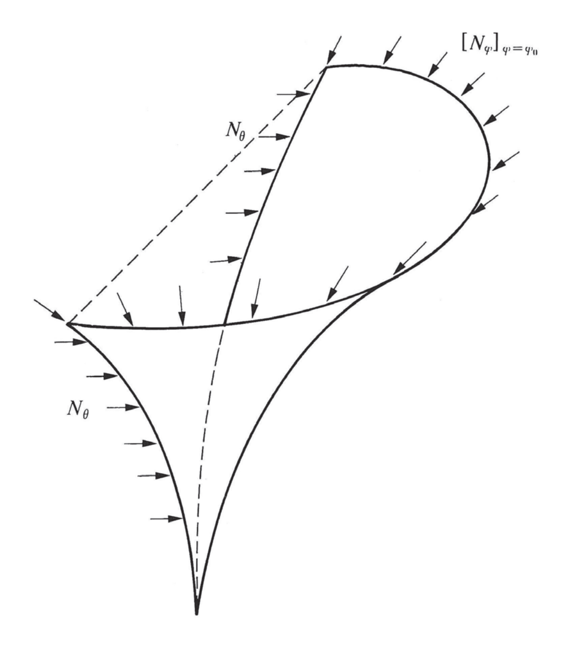


Fig. 5.4

externas que actúan sobre los bordes de corte verticales; la bóveda de abanico, de hecho, requiere un estribado. Las fuerzas horizontales son los valores integrados de la resultante de las tensiones anulares N_θ y si suman un total F en el corte, entonces

$$F = 2 \int_{\varphi_0}^{\frac{1}{2}\pi} N_\theta R d\varphi \ . \tag{5.22}$$

Si se aplica una fuerza resultante de esta magnitud (a la altura adecuada por encima de los arranques) junto con la fuerza de soporte vertical en el arranque, la media cáscara estará en equilibrio bajo el estado de tensiones internas dado por la Tabla 5.4. Esta tabla se ha calculado para la cáscara completa, y no da las tensiones que necesariamente se producirán en la media cáscara; sin embargo, es un estado de equilibrio que satisface el teorema de la seguridad expuesto en el capítulo 4.

Si el valor de N_θ de la ecuación (5.20) se sustituye en la ecuación (5.22) se encuentra que

$$F = 2wR^2 \cot \varphi_0 \ (\varphi_0 + \cos \varphi_0 + C) \ , \tag{5.23}$$

y, utilizando el valor adecuado de C, ecuación (5.21),

$$F = 2wR^2 \cos^2 \varphi_0 \ (1 - \operatorname{sen} \varphi_0) \ . \tag{5.24}$$

Para $\varphi_0 = 10°$, $F = 1{,}60wR^2$ y este valor se muestra en la Fig. 5.5(a), junto con las demás fuerzas necesarias para el equilibrio del abanico. Numéricamente, si $w = 2{,}5$ kN/m², $R = 8$ m, las fuerzas son las mostradas en la Fig. 5.5(b). Se requiere un peso muerto (claves y similares) de unos 70 kN (es decir, una masa de 7 toneladas) para cada medio abanico; el empuje horizontal de 256 kN es elevado. Las tensiones, excepto cerca del arranque del abanico, son bajas; si las cifras de la Tabla 5.4 se multiplican por 0,16 (para $R = 8$ m y una peso específico de 2.000 kg/m³) las cifras resultantes darán tensiones en N/mm².

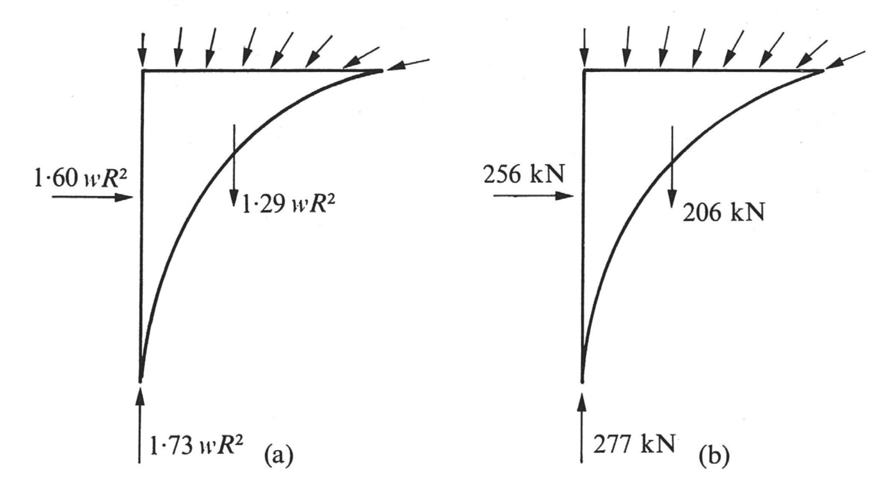


Figura 5.5

Todos estos resultados se han obtenido para un hipotético perfil circular. En cierto sentido, esta no es una muy buena aproximación a la forma de las bóvedas de abanico reales, aunque, en otro sentido, es cierto que una membrana de perfil circular puede estar contenida en el espesor de una amplia gama de estas bóvedas. Sin embargo, el perfil circular da lugar a fuerzas bastante superiores a las que se encuentran en la práctica, y es posible que se encuentre una mejor distribución de las fuerzas (que implique, por ejemplo, menores empujes) investigando otros perfiles. En efecto, las soluciones de cáscara son sensibles a pequeños cambios en el perfil supuesto, al igual que el arco del final del capítulo 4 era sensible a la forma supuesta de la línea de empujes. Esta cuestión vuelve a surgir en el estudio de la cúpula.

Para el propósito actual, en lugar de postular otra forma para la cáscara, se buscará una solución inversa para la cual la resultante anular N_θ sea en todas partes cero. Una cáscara completa de este tipo podría cortarse en dos bóvedas de abanico mediante un plano vertical (véase la figura 5.4) sin que se introduzca ninguna fuerza en el corte; la componente horizontal de cualquier carga de compresión aplicada al borde superior del abanico debe entonces equilibrarse mediante un empuje en el arranque, como se verá. El análisis es sencillo, y es muy similar al del problema de la mejor forma para un vehículo espacial que entra en atmósferas planetarias delgadas.[1] En efecto, se diseña una membrana flexible como una especie de paracaídas, y el requisito de proyecto que rige es que, para mantener la forma de la membrana, las tensiones en todas partes deben ser de tracción. Este problema es un análogo casi exacto al de la bóveda de fábrica y, aunque las condiciones de carga son diferentes, el paracaídas propuesto, en lugar de ser cupuliforme, se parece notablemente a una bóveda de abanico completa, que entra en la atmósfera con el vértice en primer lugar. En la parte más ancha del abanico, el borde del paracaídas debe reforzarse con un anillo de refuerzo; no existe ninguna solución para un borde libre. Esto, de nuevo, es análogo

---

[1] M.S. Anderson, J.C. Robinson, H.G. Bush and R.W. Fralick. *A tension shell structure for application to entry vehicles*. (National Aeronautics and Space Administration Technical Note NASA TN D-2675.) Washington D.C.: 1965.

a la carga de compresión del borde requerida anteriormente para la bóveda de perfil circular; una carga de borde similar es necesaria para el cálculo inverso de la bóveda.

Si N_θ se establece igual a cero en las ecuaciones (5.17), y se elimina N_φ, una doble integración conduce a la ecuación intrínseca para la forma del abanico,

$$\tan\varphi = \operatorname{senh}\left(\log_e B - \frac{r^2}{x_0^2}\right), \tag{5.25}$$

donde B y x_0 son constantes de integración. El valor de N_φ viene dado por

$$N_\varphi = -\frac{w x_0^2}{2r\cos\varphi}. \tag{5.26}$$

Las coordenadas pueden trasladarse a las de la Fig. 5.6, donde el origen se encuentra en el eje del abanico, y la constante x_0 puede identificarse con el radio máximo del abanico, para el que $z = 0$.

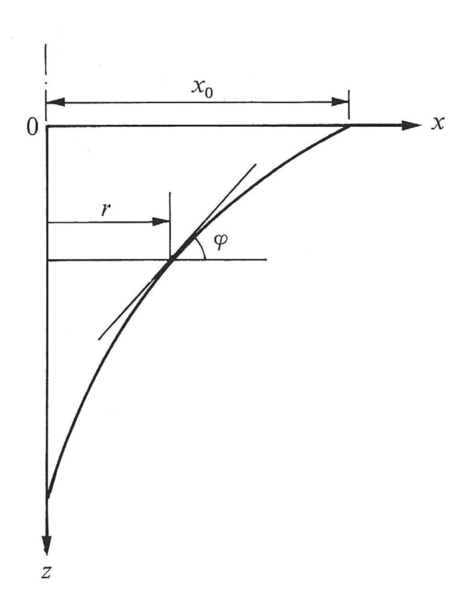


Fig. 5.6

A partir de la Fig. 5.6, $\tan\varphi = -dz/dx$, y la ecuación (5. 25) puede integrarse para dar

$$z = B\,\frac{x_0}{2}\left[\int_{x/x_0}^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \frac{1}{B^2}\int_{x/x_0}^{1} \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right]. \tag{5.27}$$

La forma del abanico determinada por la ecuación (5.27) pertenece a una única familia de curvas que dependen del valor de B; la constante x_0 es simplemente un factor de escala (el radio máximo del abanico, Fig. 5.6). La primera integral en la ecuación (5.27) es esencialmente la integral de error, y la segunda integral también se da en los libros de tablas estándar. A partir de la ecuación (5.25), φ es positiva para $r = x_0$ si $B > \mathrm{e}$, y éste es el límite inferior para B de interés práctico. En la Fig. 5.7 se muestran los perfiles para $B = \mathrm{e}$, 3, 3,24 ($\varphi_0 = 10°$) y 4. Tres de los perfiles se muestran además en la Fig. 5.8, donde se muestran las condiciones generales de equilibrio (todos los valores deben ser multiplicados por wx_0^2). El empuje horizontal ejercido por la bóveda tiene un valor wx_0^2, independientemente del valor de B; la comparación con la Fig. 5.5 muestra que el empuje actúa mucho más abajo que en el abanico del perfil circular. Tomando w = 2,5 kN/m² como para el abanico circular analizado anteriormente, y x_0 = 6,6 m (para dar el mismo radio máximo 8 (1− sen10°) del abanico), el valor de wx_0^2 es de 109 kN, que es un valor de empuje razonablemente bajo (véase la Fig. 5.5(b)).

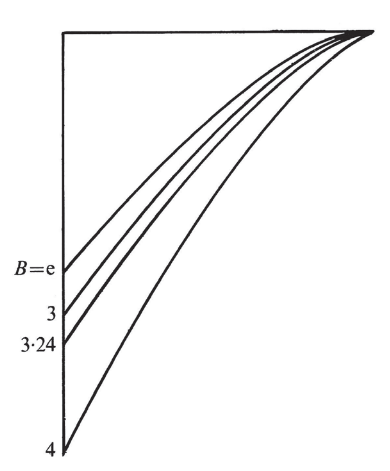


Figura 5.7

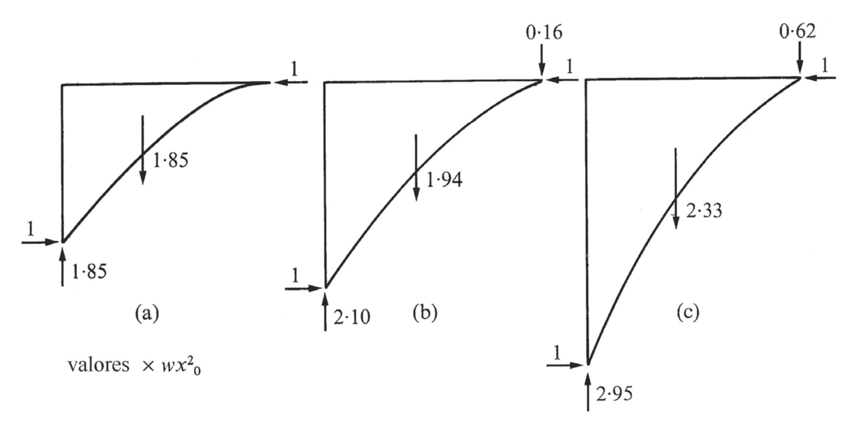


Figura 5.8

A partir de la ecuación (5.26), la resultante de tensiones meridianas N_φ, siempre de compresión, aumenta su valor desde aproximadamente $\frac{1}{2}wx_0^2$ en la parte superior del abanico hasta el infinito en el arranque; de nuevo, un abanico real se fundirá en una pared o columna. Por tanto, para x_0 = 6,6 m, la tensión de compresión en el borde, aplicado externamente por el peso del tímpano, será de unos 0,07 N/mm².

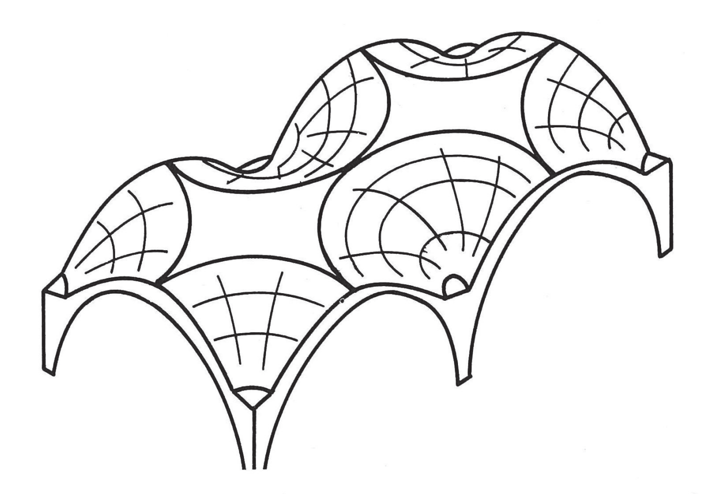


Figura 5.9

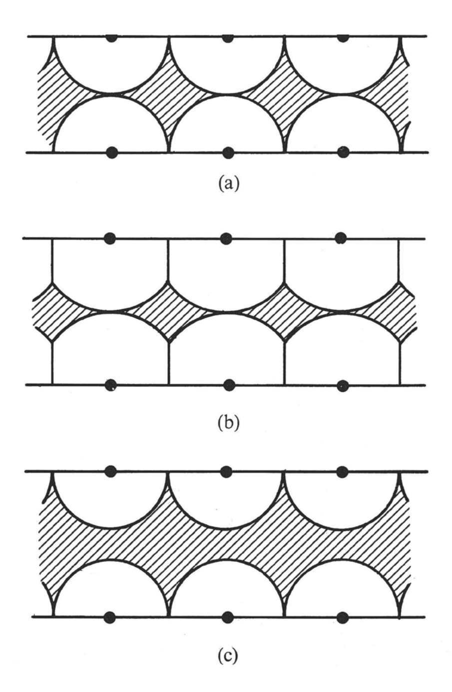


Figura 5.10

Si se utiliza una serie de abanicos para formar una bóveda sobre varios tramos (en la figura 5.9 se muestran dos tramos en perspectiva), los propios medios abanicos formarán sólo una parte del sistema completo de la cubierta. Si los tramos son cuadrados, como en la Fig. 5.9 y en la Fig. 5.10(a), las bóvedas de los abanicos propiamente dichos estarán separadas por un tímpano más o menos cupuliforme. En el caso de los compartimentos rectangulares, los abanicos pueden intersecarse (Fig. 5.10(b)), como en la capilla del King's College, o pueden estar completos (Fig. 5.10(c)), pero de nuevo habrá una región central de tímpano.

La figura 5.11 muestra la construcción de la bóveda del retrocoro de la catedral de Peterborough,[2] y puede verse el relleno de mampostería en cada

[2] R. Willis. On the Construction of the Vaults of the Middle Ages. *Transactions of the Royal Institute of British Architects* Vol. 1, 1842: 1–69.

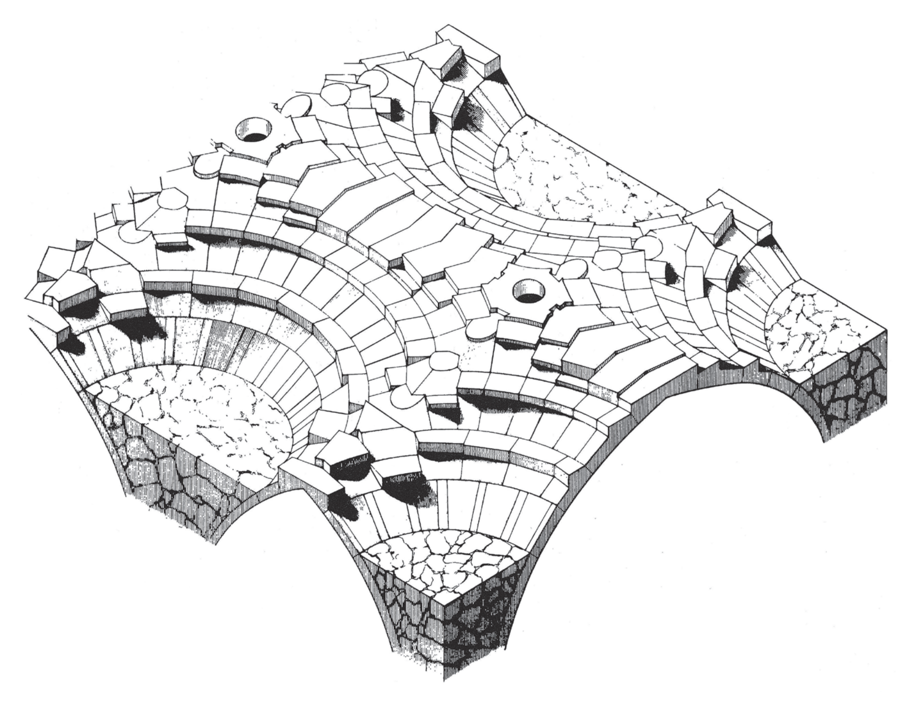


Figura 5.11

conoide de la bóveda. Tales rellenos permiten que la superficie de empujes salga de la cáscara de la bóveda de abanico hacia un material más o menos sólido; incluso sin el relleno, es evidente que la construcción real implica que el abanico se detiene lejos del arraque matemático, y que es poco probable que se encuentren en la práctica ángulos meridianos φ mayores de, digamos, 60°. Así, un compartimento de bóveda real, como por ejemplo el de Peterborough (Fig. 5.1l), puede dividirse en las tres regiones marcadas en la Fig. 5.12 a efectos del análisis estructural. En la línea central, el tímpano, muy rebajado o plano, se extiende entre los abanicos, y puede llevar claves y pinjantes, que sirven para proporcionar el pretensado necesario para evitar la tracción en los abanicos. La fábrica del tímpano plano puede considerarse como compuesta por arcos planos (véase la figura 4.5), y esta parte de la estructura es extremadamente estable.

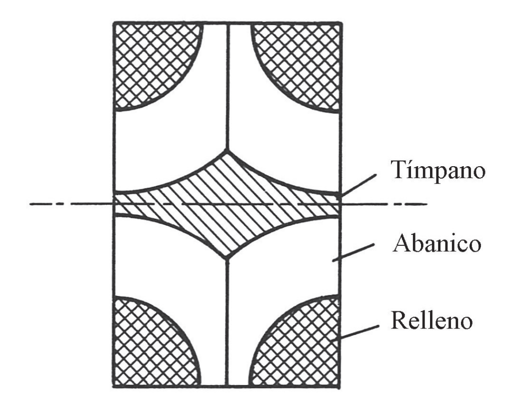


Figura 5.12

Si los abanicos están incompletos y se cruzan en aristas (como en la Fig. 5.12), la mecánica de estas aristas es exactamente análoga a la de las aristas de las bóvedas de cañón que se intersecan, que se tratará en el capítulo 6; las aristas pueden estar reforzadas o no con nervios añadidos. Los abanicos propiamente dichos son de extensión limitada, y un perfil de forma razonable y espesor bastante pequeño puede acomodar la curva de la ecuación (5.27); en el muro, el relleno del conoide de la bóveda permite que el empuje de la bóveda actúe dentro de un rango de alturas.

Todo este análisis demuestra, de hecho, que la bóveda de abanico es una forma eficiente de sistema de cubierta. Un proyectista de fábricas de finales del siglo XV, especializado en bóvedas de abanico, podía elegir cualquier perfil que le pareciese adecuado, podía decorar la superficie de la bóveda con nervios no estructurales y podía insertar en la línea central de la nave una serie de pesadas claves, todo ello con la seguridad de que su estructura sería estable.

Es interesante confirmar esta estabilidad con un ejemplo de análisis estático de una bóveda existente. La bóveda de Peterborough (Fig. 5.11) tiene un grosor de unos 10 cm, y además presenta un patrón bastante denso de nervios también de unos 10 cm de grosor. Por lo tanto, para un peso unitario del material de 20 kN/m^3, el peso propio w por unidad de superficie puede ser de unos 4 kN/m^2. Los tramos están espaciados unos 4,7 m, y a lo largo

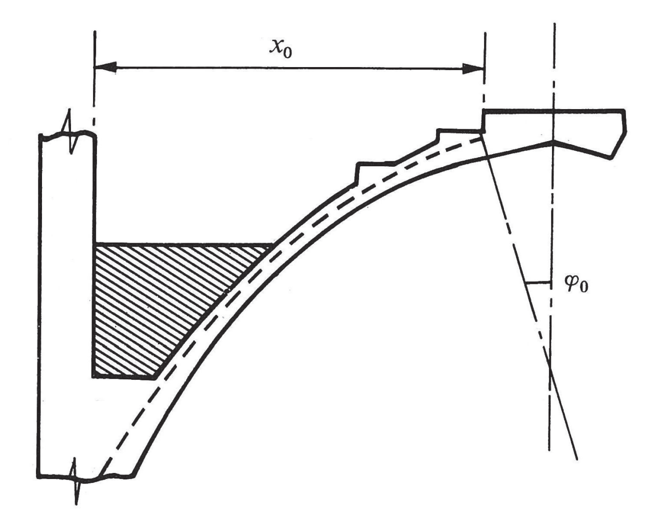


Figura 5.13

de la línea central las piedras del tímpano tienen una anchura de unos 1,2 m y un espesor de 0,3 m. Por lo tanto, la anchura efectiva x_0 del abanico (Fig. 5.13) es de unos 3,5 m, en lugar de 4,1 m, la mitad de la luz del retrocoro. Por lo tanto, si uno de los perfiles inversos de la ecuación (5.27), de los cuales tres están esbozados en la Fig. 5.8, puede ajustarse al abanico de Peterborough, entonces el empuje horizontal suministrado por el abanico, y necesario para su estabilidad, tendrá el valor $wx_0^2 = 4\,(3{,}5)^2 = 49$ kN.

Como ya se ha comentado, este empuje debe provenir del peso de la fábrica del tímpano, y se puede estudiar el equilibrio de un tramo completo, de 4,7 m de longitud. Utilizando valores medios, el peso del tímpano es (20)(4,7)(1,2)(0,3) = 33,8 kN, y la Fig. 5.14 muestra las distintas fuerzas que actúan, en kN. El empuje horizontal de 49,0 kN se combina con una fuerza vertical de 16,9 kN, por lo que el empuje total resultante que actúa sobre el borde de cada abanico forma un ángulo $\varphi_0 = \tan^{-1}(16{,}9/49{,}0) = 19°$ con la horizontal. Este ángulo es casi exactamente igual al marcado en el dibujo a escala de la Fig. 5.13. La línea discontinua de la Fig. 5.13 es la traza de la superficie de empujes de la ecuación (5.27) con la constante B tomada como 3 (cf. Fig. 5.8(b)), y se verá que coincide bastante bien con la forma de la bóveda real. Sin embargo, el ajuste no es perfecto y, en particular, el ángulo φ_0 corres-

pondiente a $B = 3$ es de unos 6° en lugar de los 19° necesarios. El ángulo φ cambia rápidamente en la región cercana a φ_0, y la solución esbozada en la Fig. 5.13 es satisfactoria hasta unos pocos centímetros de la fábrica del tímpano.

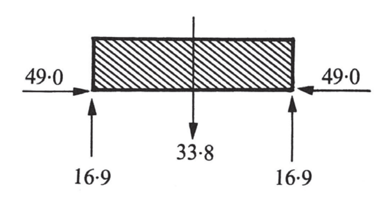


Figura 5.14

Hay mucho espacio para hacer pequeños ajustes en la superficie de empujes en esta región, y lo que la Fig. 5.13 demuestra es que normalmente es fácil encontrar un perfil sin tracciones satisfactorio que se encuentre dentro del espesor de una bóveda de abanico real. De este modo, no sólo se puede confirmar la estabilidad de la estructura real, sino que se pueden hacer estimaciones realistas de las cantidades estructuralmente significativas (por ejemplo, el empuje de la bóveda es de unos 50 kN por tramo en Peterborough). Otras bóvedas de abanico (King's College Chapel, Henry VII Chapel en Westminster) tienen perfiles algo más rebajados que la de Peterborough, pero se pueden ajustar los perfiles inversos sin tracciones para las partes principales de la bóveda, con ajustes cerca del tímpano, y hacer estimaciones similares del empuje.

Cúpulas

La solución de membrana para una cúpula semiesférica sometida a su propio peso se dio en el capítulo 1 (ecuaciones (1.13)). En la coronación de la cúpula las tensiones son de compresión, y la tensión meridiana N_φ permanece en compresión en toda la cúpula. Sin embargo, la tensión anular N_θ cambia de signo a una distancia angular de 51,8° desde la coronación; una semicúpula seccionada (Fig. 5.15) tendría una distribución de tensiones anulares en el corte como se muestra, con grandes tensiones de tracción hacia la base de la cúpula.

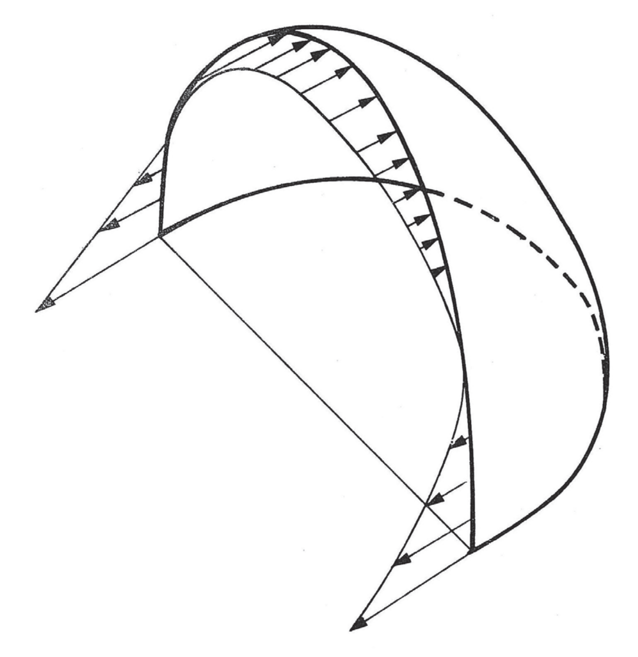


Figura 5.15

Estas tensiones de tracción son inadmisibles para un material que no resiste tracciones y, al igual que para la aguja y la bóveda de abanico, se buscará un tipo de solución alternativa. En el caso de la aguja se examinó una superficie de membrana (el cono) que se encontraba dentro de la estructura real de geometría más complicada; para la bóveda de abanico, se derivó una solución inversa sin tracciones, y de nuevo se encontró que ésta podía encajar en la estructura real. La solución para la cúpula también se basará en el teorema de seguridad de la teoría plástica, pero se adoptará un enfoque aún más sencillo; la estructura se cortará en elementos bidimensionales y se aplicarán las ideas del capítulo 4.

Sin embargo, antes de iniciar este análisis, las ecuaciones de la membrana (1.13) pueden servir para iluminar de nuevo la cuestión de lo que se entiende por estado real de una estructura. Para ilustrarlo con un ejemplo numérico, consideraremos un casquete esférico como cubierta sobre una

superficie de 30 m de diámetro, siendo el radio de la cáscara también de 30 m, de modo que la altura es de 4,02 m (Fig. 5.16).

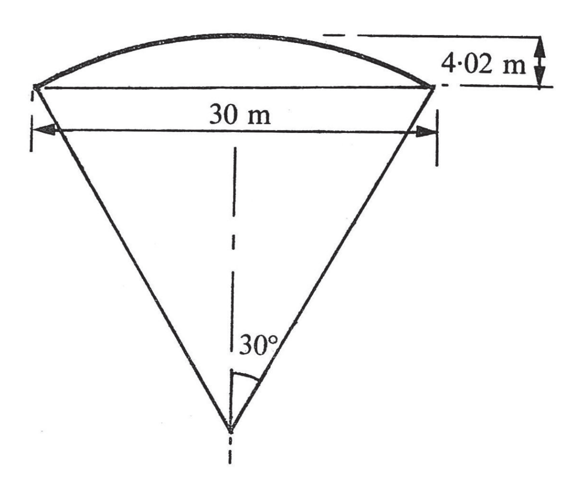


Figura 5.16

Todas las tensiones de membrana son positivas en la cáscara, ya que el apoyo está a menos de 51,8° de la coronación. La cáscara no es especialmente rebajada y las tensiones son bajas; a partir de las ecuaciones (1.13) o de la Fig. 1.7, las resultantes de tensiones en la coronación de una esfera de radio *R* vienen dadas por

$$N_\theta = N_\varphi = -\tfrac{1}{2}wR\,. \tag{5.28}$$

Si el peso específico del material es de 20 kN/m^3, la ecuación (5.28) conduce a una tensión en la coronación de valor 0,30 N/mm^2.

Ahora bien, cabe suponer que, en la práctica, se produzcan pequeñas deformaciones en la cáscara al desencofrar o que, alternativamente, algunas pequeñas deformaciones se deban a una colocación ligeramente imperfecta del encofrado original. Como defecto aparentemente trivial de este tipo, supongamos que la coronación desciende 0,10 m (es decir, el ⅓ por ciento de la luz) y que toda la cúpula, en lugar de ser esférica, adopta la

forma de un elipsoide de revolución. Para las dimensiones dadas, la elipse generadora tiene una relación entre el eje mayor y el eje menor $^{a}/_{b}$ de valor 2, con a = 18 m. La solución general de membrana para un elipsoide de revolución se dio en el capítulo 2, y se encontró que las resultantes de tensiones en la coronación (ecuación (2.34)) tienen el valor

$$N_\theta = N_\varphi = -\tfrac{1}{2}w \frac{a^2}{b} \ . \tag{5.29}$$

que, numéricamente, es igual a 0,36 N/mm².

Por lo tanto, el pequeño defecto (⅓ de un porcentaje de la luz, ó el 2½% de la altura de 4,02 m) ha provocado aparentemente un aumento de la tensión del 20% en la coronación. Dicho de otro modo, una elipse de relación de eje mayor a menor 2 y un círculo pueden ser dibujados superpuestos para coincidir con un error de ±0,10 m sobre una luz de 30 m y una altura de 4,02 m (a escala, estarían dentro del espesor de la línea de la Fig. 5.16). Construir una cáscara real con esta precisión es una tarea formidable, y el ingeniero que utiliza la teoría de la membrana debe tener, si es consciente de la proximidad geométrica de la elipse y el círculo, dudas considerables sobre el significado de sus cálculos.

Este es otro ejemplo de la sensibilidad de algunas estructuras a los pequeños cambios de geometría. En el capítulo 4 se vio que los movimientos imperceptibles de los apoyos de un arco podían dar lugar a una amplia gama de valores para el empuje sobre los estribos, aunque el rango se reduce a medida que se reduce el espesor del arco. Del mismo modo, si una cáscara es muy delgada, como puede ocurrir en la práctica moderna del hormigón armado, la geometría de la superficie media puede dictar una solución de equilibrio cuyas características se definen dentro de límites próximos. Sin embargo, si la cáscara es muy delgada, la propia superficie media puede deformarse y dar lugar a tensiones reales que pueden diferir notablemente de las calculadas. El peligro radica en la posibilidad de que la superficie de la cáscara pandee localmente, pero esto sólo se produce, como se mencionó en el capítulo 1, para cáscaras de gran luz. En el caso de cáscaras de luces medianas (y ciertamente en el ejemplo numérico de la Fig. 5.16), el nivel de tensiones pueden ser un orden de magnitud inferior a

las requeridas para el pandeo, por lo que el proyectista puede confiar en los cálculos de equilibrio para dimensionar y detallar su estructura.

Una forma conveniente, cómoda, de construir una solución de equilibrio para la cúpula es dividirla en un gran número de "gajos de naranja" o lunas (Fig. 5.17). Si se puede establecer la estabilidad de cada uno de estos elementos, entonces se puede utilizar el teorema de la seguridad para confirmar la estabilidad de la estructura original que no está dividida. La característica esencial de la luna es que la resultante de tensiones anulares es cero, y una forma de obtener una solución es hacer N_θ igual a cero en las ecuaciones básicas (5.17). El análisis sigue muy de cerca el de la bóveda de abanico; la ecuación intrínseca para la superficie de empujes se convierte en

$$rr_1 \cos^2\varphi = \text{const.} \,, \tag{5.30}$$

y esta ecuación puede integrarse para dar una ecuación similar a (5.27), pero con un cambio de signo, para dar una superficie de curvatura gaussiana positiva en lugar de negativa.

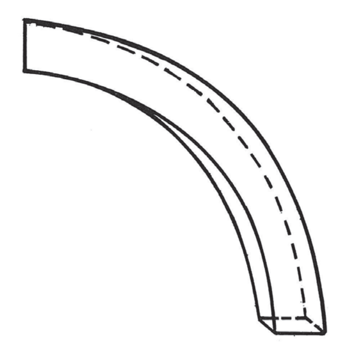


Figura 5.17

Esta forma de solución no es particularmente conveniente para el propósito de comparar la superficie de empujes correspondiente con la cúpula esférica, por lo que se utilizarán las técnicas del capítulo 4. El problema analítico es similar al del arco de dovelas, pero para la luna de la Fig. 5.17 la anchura del arco se reduce a cero en la coronación, por lo que el peso no

se distribuye uniformemente. Así pues, se buscará una línea de empujes para cada segmento de la cúpula, situada en el interior de la fábrica; se estudiará también el caso límite cuando se acaba formando un mecanismo de colapso, lo que da el espesor mínimo de la cúpula (cf. Fig. 4.7).

Aunque cada segmento se considera de forma aislada, el mecanismo de colapso debe ser un mecanismo posible para la cúpula considerada en su conjunto. Además, hay que demostrar que la línea de empujes, aunque llega justo a la superficie de la fábrica en los puntos de articulación, en otros lugares siempre se encuentra dentro de la fábrica. La posición límite correcta de la línea de empujes para el gajo de naranja se ha dibujado en la Fig. 5.18; toca al trasdós en *P* y al intradós en *Q*.

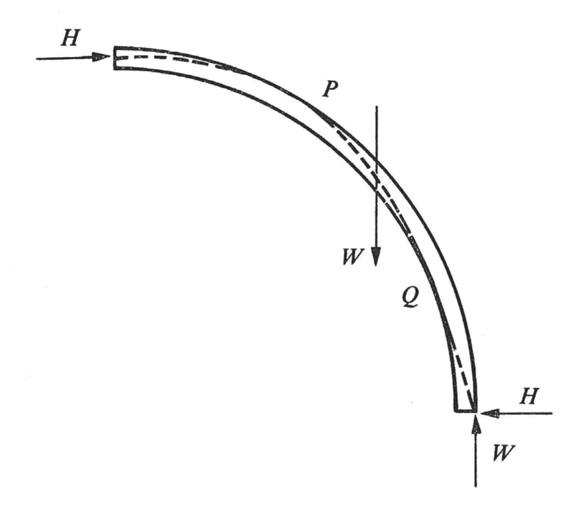


Figura 5.18

La figura 5.19 muestra el mecanismo de colapso correspondiente, para el que una región central cerca de la coronación de la cúpula no se deforma, sino que simplemente desciende verticalmente; los gajos adyacentes se separarán entre *P* y la base a medida que la cúpula colapsa, expresando la condición de tensión cero en la fábrica. Nótese que, en la Fig. 5.18, el empuje *H* que actúa sobre el segmento en la coronación debe ser proporcionado

por un empuje igual y opuesto en el segmento diametralmente opuesto; el presente análisis se aplica, por lo tanto, sólo a una cúpula simétrica completa, y no, por ejemplo, a la semicúpula de la Fig. 5.15 (que se estudiará al final de este capítulo).

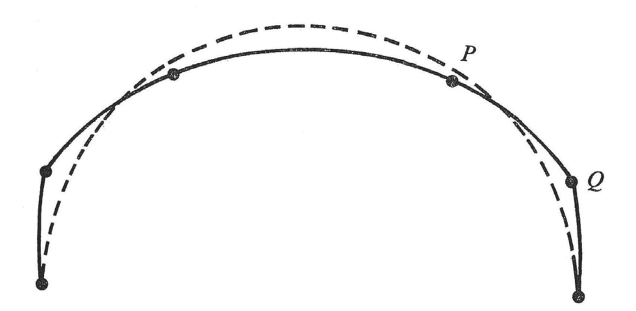


Figura 5.19

En la Fig. 5.18 se puede considerar el equilibrio de las secciones, de la coronación hasta P, de P a Q, y de Q al arranque, exactamente como para el arco del capítulo 4. Como alternativa, se puede hacer un análisis de trabajo virtual. En cualquiera de los dos casos, las ecuaciones pueden resolverse numéricamente para obtener la relación de espesor t/R necesaria para una semiesfera con un valor de 0,042. El análisis puede repetirse para cúpulas que no sean semiesferas completas, y la Fig. 5.20 ofrece un gráfico del espesor requerido en función del ángulo de corte α.

Se recordará que las resultantes de tensiones de membrana para una superficie esférica son de compresión para $0 < \varphi < 51{,}8°$; la Fig. 5.20 confirma que el presente análisis da un espesor teóricamente nulo para $\alpha = 51{,}8°$. (Las coordenadas angulares, digamos β y γ, de los puntos P y Q en la Fig. 5.18 están siempre relacionadas por

$$(1 - \cos\beta)\ \tan\gamma \ = \ (1 - \cos\gamma)\ \tan\beta\ , \tag{5.31}$$

y el máximo de $(1-\cos\beta)/\tan\beta$ viene dado por $\cos\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, es decir, $\beta = 51{,}8°$.)

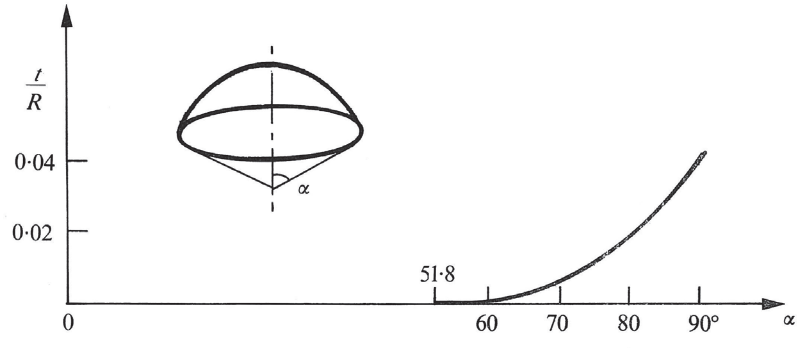


Figura 5.20

Así pues, una cúpula semiesférica completa, cuya relación de espesor t/R sea, por ejemplo, de 0,06, y construida con una fábrica incapaz de soportar fuerzas de tracción, debería, sin embargo, mantenerse en pie sin refuerzos. La conclusión de Poleni, mencionada en el capítulo 1, de que la cúpula de San Pedro no corría peligro a pesar de sus grietas está justificada; la luz de la cúpula es de 40 m, y el espesor de unos 3 m (aunque la cúpula consta de dos cáscaras desde la coronación hasta $\varphi \simeq 70°$). No obstante, una cúpula sin refuerzos o armados debe estar bien soportada en la base; la Fig. 5.18 muestra el empuje H que debe aplicarse, así como la fuerza vertical W.

Una buena estimación del valor de H para la semiesfera puede hacerse considerando el equilibrio global del segmento, redibujado en la Fig. 5.21

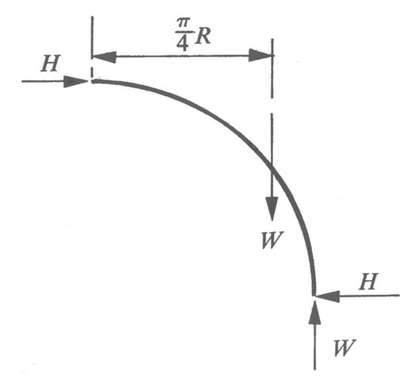


Figura 5.21

La línea de acción del peso W del segmento es la indicada, a partir de la cual $H = (1 - \pi/4)W = 0{,}215W$. Así pues, una cúpula semiesférica de 40 m de luz y 150.000 kN de peso, por ejemplo, necesita una fuerza horizontal total H, distribuida uniformemente alrededor de la base, de unos 32.500 kN, es decir, unos 250 kN/m. Si esta fuerza fuera proporcionada por un conjunto de zunchos o tirantes anulares en la base, la fuerza total en los tirantes sería de 5.000 kN.

Las cifras anteriores son del orden de magnitud adecuado para la cúpula de San Pedro, y las propuestas de Poleni, de acuerdo con las de los *tre mattematici*, de que se proporcionasen tirantes adicionales, estaban dirigidas a la contención del empuje. El problema es grave, y está claro que, a falta de los tirantes necesarios, hay que prever en la construcción estribos a la cúpula para garantizar la estabilidad de toda la estructura.

Cúpulas incompletas

Algunas de las cúpulas consideradas en el capítulo 1 eran incompletas en el sentido de que se omitía la coronación o se cargaba la cúpula con una linterna. La técnica de los cortes puede utilizarse de nuevo para establecer líneas de empujes para segmentos individuales de este tipo de cúpulas y este método fue de hecho utilizado por Poleni en su análisis sobre la estabilidad de San Pedro.

Es interesante otro tipo de cúpula incompleta: la semicúpula de la Fig. 5.15. Las soluciones simétricas de las ecuaciones (1.13) para la semiesfera completa son válidas para la semicúpula sólo si el borde vertical está sometido a las fuerzas de compresión y tracción esbozadas en la figura. Sin embargo, es intuitivo que una semicúpula con un espesor suficiente podrá mantenerse en pie incluso si el borde vertical no está soportado; se puede hacer una estimación segura del espesor necesario cortando de nuevo la cúpula en secciones.

La figura 5.22 muestra una semicúpula cortada en una serie de arcos de medio punto paralelos, siendo cada arco independiente de sus vecinos. A partir de la Fig. 4.9 para el arco de dovelas, si cada arco elemental tiene un espesor t/R de algo más de 0,1 será estable. Análogamente, si la semicúpula tiene

un ángulo de apertura de 75°, de modo que los arcos cortados no forman semicírculos completos, entonces, una cúpula con $t/R = 0{,}05$ será estable.

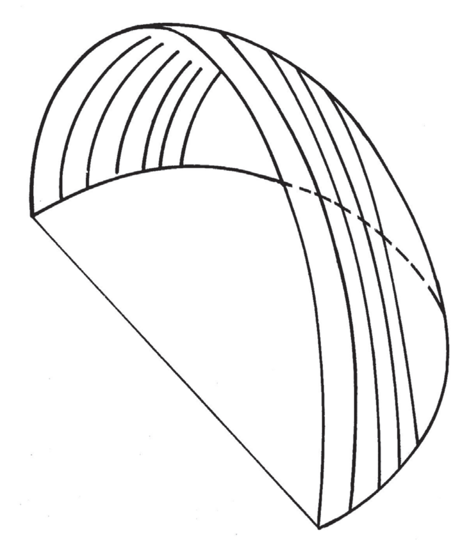


Figura 5.22

Estas estimaciones para t/R son demasiado grandes; la interconexión entre estos arcos elementales en las estructuras reales garantiza, por el teorema de la seguridad de la teoría plástica, que una cáscara más delgada se mantendrá en pie. De hecho, el corte en arcos paralelos de la Fig. 5.22 debe destruir fuerzas de interconexión bastante grandes y, por tanto, conducir a un sistema de tensiones que está bastante lejos de las tensiones de la cúpula real; no obstante, los arcos paralelos conducen a un sistema de equilibrio, es decir, a un estado *posible* para la estructura.

Así, una semicúpula, de suficiente espesor, se mantendrá como un elemento estructural independiente. Por otra parte, en la Fig. 5.15 resulta evidente que una semicúpula formaría un buen contrafuerte, ya que el borde libre puede estar sometido, al menos en la mitad superior, a grandes fuerzas de compresión. Como ejemplo sencillo, una cúpula completa, mostrada en planta en la Fig. 5.23, se ha cortado en dos medias cúpulas iguales e inde-

pendientes, y una de las medias cúpulas se ha cortado además en lunas. Cada luna será estable si se aplica una fuerza de apuntalamiento *H*, como se muestra en la Fig. 5.18, en la coronación. Ahora bien, estas fuerzas de apuntalamiento *H* sumadas para todas los gajos producirán una componente desequilibrada que actuará sobre la otra semicúpula. Por definición, toda la cúpula se mantiene en pie y, por consiguiente, la semicúpula sometida a la fuerza desequilibrada (de magnitud 0,068*W*, donde *W* es el peso de toda la cúpula) también se mantendrá en pie.

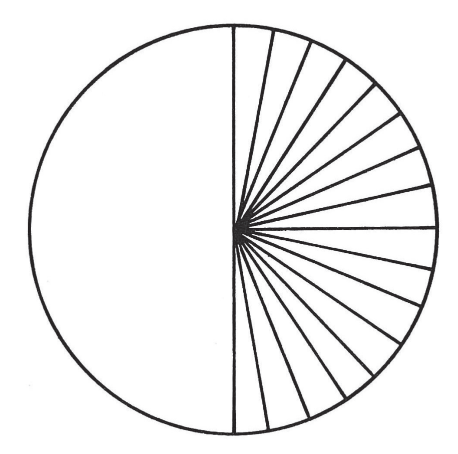


Figura 5.23

Por lo tanto, una semicúpula (de espesor suficiente) puede mantenerse en pie libremente o apoyarse contra otra semicúpula igual. Se puede demostrar, y de hecho parece obvio, que si una estructura del tipo considerado aquí está sujeta a un conjunto de fuerzas en equilibrio y a una única fuerza variable, digamos *P*, y si la estructura es estable bajo dos valores diferentes P_1 y P_2 de la fuerza variable, entonces será estable bajo cualquier valor *P* que se encuentre entre los límites P_1 y P_2. Por lo tanto, dado que la semicúpula se mantendrá en pie frente a un empuje lateral nulo en la coronación (libre) y frente al empuje lateral total de otra semicúpula (cortada), también se mantendrá en pie bajo cualquier valor menor del empuje.

Como otra curiosidad estructural, también de cierto interés práctico, puede considerarse la cúpula de tres cuartos de la Fig. 5.24.

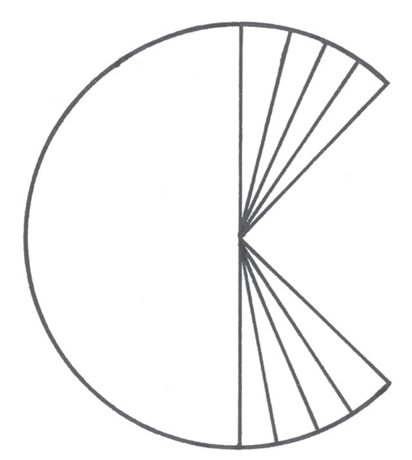


Figura 5.24

En comparación con la Fig. 5.23, se ha suprimido una cuarta parte de la cúpula, formada por lunas; las lunas restantes, naturalmente, empujarán contra la semicúpula con una fuerza (0,020*W*) menor que la que se deriva del número completo de lunas. Por lo tanto, si el espesor de la fábrica es tal que una semicúpula se mantiene en pie libremente, también lo hará una cúpula de tres cuartos.

De hecho, la cúpula principal de Santa Sofía en Estambul ha estado dos veces en este estado. Un fuerte terremoto en el año 986 d.C. hizo que colapsase el sistema de contrarresto occidental junto con una cuarta parte de la cúpula principal, pero el resto de la cúpula de tres cuartos se mantuvo en pie. La estructura fue reparada, y un segundo terremoto en 1346 d.C. provocó el colapso del sistema de contrarresto oriental, lo que supuso de nuevo el colapso de sólo una cuarta parte de la cúpula. (La cúpula principal tiene aproximadamente 30 m de luz y el espesor es de unos 75 cm, por lo que la relación nominal t/R es de aproximadamente 0,05. Sin embargo, la cúpula no es una semiesfera completa, y el valor 0,05 es totalmente adecuado para garantizar la estabilidad de la cúpula en condiciones normales.)

Las dificultades en el análisis exacto de las cúpulas incompletas radican en su asimetría. Por un lado, puede ser imposible resolver las ecuaciones de membrana referidas a la superficie original de forma que se satisfagan las

condiciones de contorno; las ecuaciones (2.19) con $r_1 = r_2 = a$ no pueden resolverse para la semicúpula aislada. Por otro lado, un análisis seguro requiere la construcción de una superficie de empujes tridimensional situada dentro de la fábrica, que también satisfaga las condiciones de contorno de la carga; la geometría de dicha superficie puede ser complicada. La consideración de cortes bidimensionales puede conducir a soluciones mucho más sencillas, que tienen el mérito de ser seguras. Esta técnica segura de cortes es bastante adecuada para las estructuras consideradas aquí, que tienen relaciones t/R de 0,05 o mayores.

6
La bóveda de crucería

Los cilindros intersecados de la Fig. 6.1 se tomarán como modelo de una bóveda de fábrica que cubre una nave; este modelo es burdo, pero muestra, no obstante, las características esenciales de este tipo de estructuras. Un cañón continuo de radio *a*, cuyo eje se encuentra a lo largo de la nave, es intersecado en ángulo recto por una sucesión de cilindros similares. Se supondrá que todas las cáscaras tienen el mismo espesor uniforme, con peso unitario *w*.

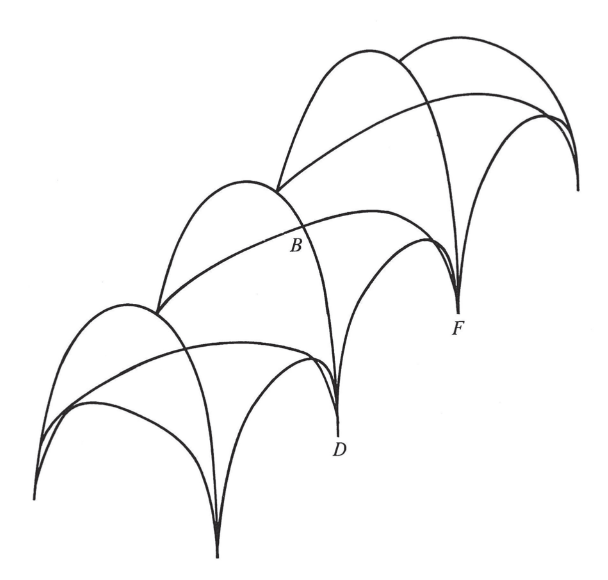


Figura 6.1

Las ecuaciones de membrana dan una solución que proporciona el patrón general de fuerzas necesario para el equilibrio de la bóveda, y esta solución se estudiará en primer lugar. Después, se utilizará el método de los cortes del capítulo anterior para obtener estimaciones alternativas de las magnitudes estructurales.

La solución de membrana

La Fig. 6.2 muestra un único tramo de la bóveda; el plano *OAD* es un plano de simetría, y la resultante de tensiones de cortante $N_{x\theta}$ a lo largo de *AD* debe ser cero.

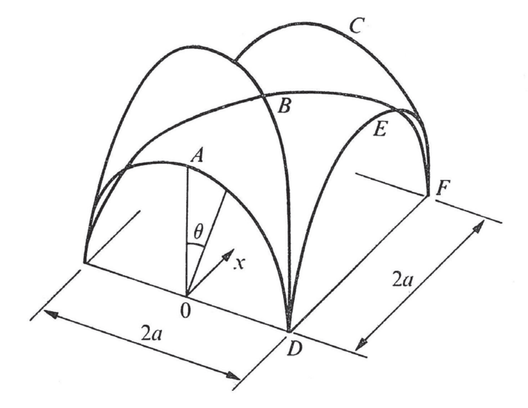


Figura 6.2

Así, las ecuaciones básicas (1.21), (1. 24) y (1.25) para las resultantes de tensiones son, para la cáscara *ABD*,

$$N_\theta = -wa \cos\theta ,$$

$$N_{x\theta} = -2wx \operatorname{sen}\theta , \tag{6.1}$$

$$N_x = \frac{wx^2}{a} \cos\theta + f(\theta)$$

donde, aunque se ha calculado una función de integración, queda por encontrar la función $f(\theta)$.

No obstante, ya se pueden extraer ciertas conclusiones de las ecuaciones (6.1). Si se corta por la mitad la nave de la Fig. 6.2, se verá que una fuerza de compresión de magnitud *wa* por unidad de longitud (de la primera de las ecuaciones (6.1)) debe actuar a través del corte *ABC* (Fig. 6.3).Como los bordes *AD* y *CF* están libres de cortante, entonces el empuje lateral total de $2wa^2$, mostrado en el alzado lateral de la Fig. 6.4, debe ser resistido por fuerzas horizontales que actúan a lo largo del borde circular *DEF*. La distribución precisa de estas fuerzas longitudinales (es decir, del tipo N_x) se encontrará más adelante; de cualquier manera que se distribuyan, deben tener una resultante de magnitud $2wa^2$, como se muestra en la Fig. 6.4, actuando a cierta altura *h* por debajo de la parte superior de la bóveda.

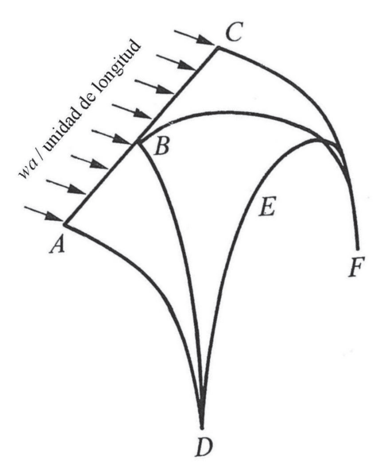


Figura 6.3

Ahora bien, el peso total del material en la cáscara de la Fig. 6.3 es $W = 2{,}28wa^2$, y este peso actúa a una distancia $0{,}468a$ del plano *DEF*. Un simple equilibrio de momentos para la Fig. 6.4 muestra que $h = 0{,}534a$.

En la construcción gótica, los arbotantes proporcionan una fuerza de apuntalamiento horizontal a cada vano y, para este modelo sencillo, estos arbotantes deben colocarse evidentemente como se muestra en la Fig. 6.5. Por lo tanto, se necesitará un elemento de borde a lo largo de *DEF* para recoger los empujes horizontales de la cáscara y transmitirlos a los arbotantes.

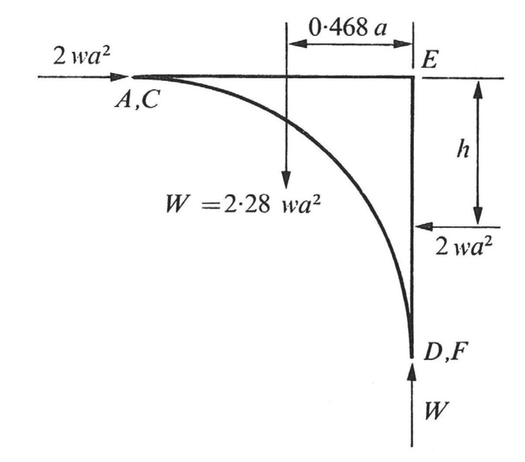


Figura 6.4

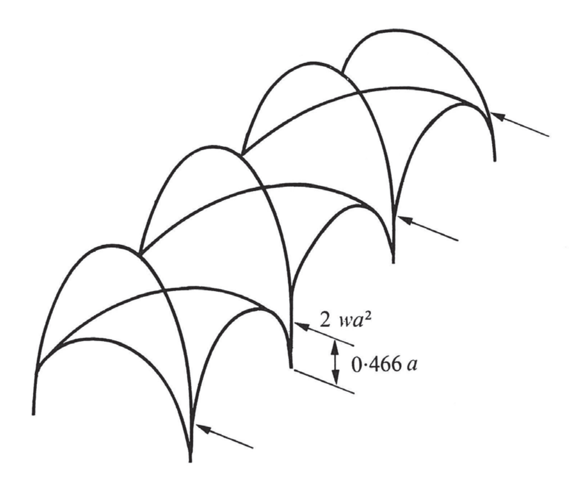


Figura 6.5

Hasta ahora en el análisis no se han hecho más suposiciones que las ya implícitas en la teoría de membrana. La resultante de tensiones anulares N_θ en las ecuaciones (6.1) se determina inmediatamente, y la resultante de tensiones de cortante $N_{x\theta}$ se calcula por condiciones de simetría. Sin embargo, para hallar el valor de N_x hay que hacer alguna suposición sobre las condi-

ciones de apoyo en los bordes libres de la cáscara. Es cierto que el empuje total en el borde *DEF* debe ser $2wa^2$, y la línea de acción de la resultante se fija como se muestra en la Fig. 6.4, donde $h = 0{,}534a$, pero estas afirmaciones no determinan una distribución única de las fuerzas.

Se puede avanzar si se supone que cada uno de los cuatro segmentos de cáscara geométricamente similares de la Fig. 6.2 tiene distribuciones de tensiones similares. No hay ninguna razón para suponer a priori que las cáscaras cortas Norte-Sur se comportan de la misma manera que la nave larga Este-Oeste; sin embargo, la suposición de que se comportan de la misma manera conduce a una solución básica simétrica.

Así, en el tramo de cáscara de la Fig. 6.2 se supone que el borde *DE* también está libre de las resultantes de tensiones de cortante (por simetría, dado que el borde *AD* está libre de tensiones de cortante); sin embargo, las resultantes de tensiones longitudinales N_x están presentes en estos bordes, y de hecho deben sumar $2wa^2$ a lo largo del semicírculo. Si se realiza un corte horizontal a través de la cáscara (Fig. 6.6), se puede considerar el equilibrio vertical para el casquete resultante, que se muestra de nuevo en la Fig. 6.7.

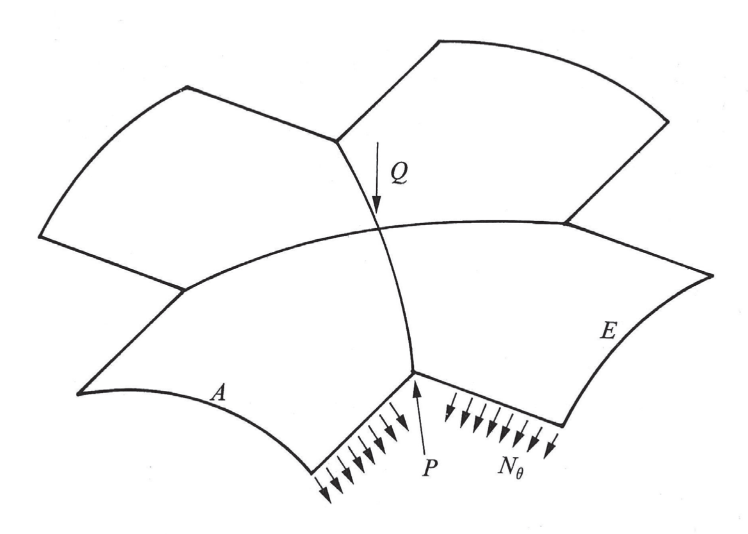


Figura 6.6

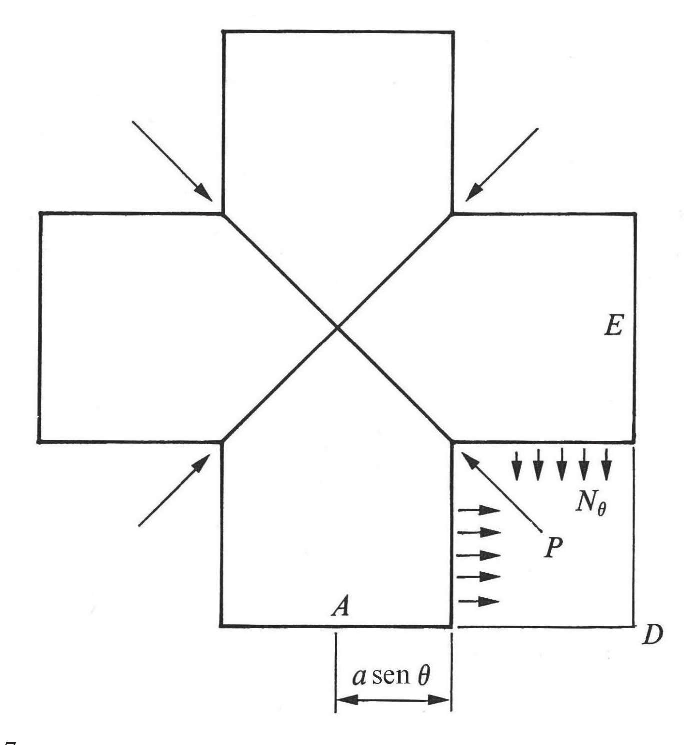


Figura 6.7

A lo largo de los bordes cortados, la resultante de tensiones anulares N_θ (que actúa, por supuesto, en los ocho cortes) tendrá una componente vertical que ayudará a soportar el peso *Q* de la cáscara, pero cualquier resultante de tensiones de cortante $N_{x\theta}$ que pueda actuar en estos bordes cortados se encuentra en un plano horizontal, y no tendrá componente vertica1. Los bordes libres de la cáscara, *AD* y *DE*, sólo soportan fuerzas longitudinales, por lo que, de hecho, sólo la componente de N_θ está disponible para soportar el peso de la cáscara.

Esta componente vertical de N_θ es

$$8N_\theta \ (\operatorname{sen}\theta)\ (a)\ (1 - \operatorname{sen}\theta)$$

$$= -8wa^2\ (1 - \operatorname{sen}\theta)\ (\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta) \qquad (6.2)$$

y el peso Q de la cáscara vale

$$Q = 8w\int_0^\theta a\,(1 - \operatorname{sen}\alpha)\;\; a\; d\alpha \;=\; 8wa^2\;(\theta + \cos\theta\; - 1)\;. \qquad (6.3)$$

Por lo tanto, hay un fallo fundamental para satisfacer el equilibrio vertical, ya que las expresiones (6.2) y (6.3) no suman cero. Es necesario un soporte adicional y es preciso añadir un elemento portante en la unión de las cáscaras cilíndricas. En la construcción románica, esta unión se denomina “arista”; en la gótica se añade un elemento adicional, un “nervio”, y utilizaremos este término en lo que sigue.

Las ecuaciones (6.2) y (6.3) muestran que es necesario un nervio; la cuestión es si se puede encontrar una solución al problema con el nervio actuando puramente como un arco a compresión, transmitiendo el empuje a lo largo de la línea de la arista sin flexiones. Si tal solución es posible, entonces el corte de las Figs. 6.6 y 6.7 implicará cuatro fuerzas P, como se muestra, inclinadas un ángulo ψ respecto a la horizontal, donde $\sqrt{2}\tan\psi = \tan\theta$. Así, para establecer el equilibrio vertical, la expresión $4P\operatorname{sen}\psi$ debe ser igual a la suma de (6.2) y (6.3), es decir

$$P = 2wa^2\;\cot\theta\,(2 + \tan^2\theta)^{1/2}\,(\operatorname{sen}^2\theta\;\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \;\theta + \cos\theta - 1). \qquad (6.4)$$

La expresión (6.4) se ha representado en la Fig. 6.8; se verá que el valor máximo es un poco mayor que wa^2 y se produce a unos 60° de la coronación de la bóveda.

Antes de ampliar el análisis, se pueden investigar los niveles de tensión en las distintas partes de la cáscara. En la cáscara propiamente dicha, las resultantes de tensiones de membrana tienen magnitudes de orden wa, a partir de las ecuaciones (6.1); por tanto, las tensiones en una cáscara de espesor t son de orden wa/t (es decir, ρa, véase la ecuación (1.1)). Si las dimensiones de los nervios en las aristas son del mismo orden que el espesor de la cáscara, de modo que los nervios miden, digamos, $t \times t$ en la sección transversal, entonces la fuerza en los nervios P de la ecuación (6.4)

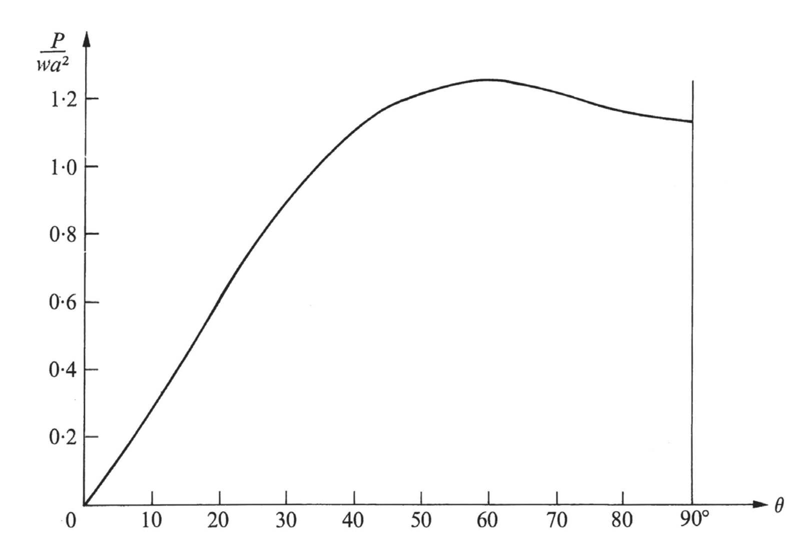


Figura 6.8

dará lugar a tensiones del orden wa^2/t^2, es decir, mayores por un factor a/t que las tensiones en la propia cáscara. Para una bóveda medieval bastante gruesa (digamos $a/t = 20$), este aumento de la tensión no incomodará al material. En efecto, el nervio puede considerarse, no como una adición separada al exterior de la cáscara (gótica), sino como parte de la propia cáscara (románica); en este caso, la solución de membrana indica que el nivel general de tensiones en la cáscara aumentará por un factor de aproximadamente a/t en las proximidades de las uniones de las superficies de la cáscara.

A partir de la distribución conocida de la fuerza de los nervios P, ecuación (6.4), es posible ahora determinar la distribución del empuje N_{x0} alrededor de los bordes de la cáscara (los empujes de contrarresto). La Fig. 6.9. muestra una de las cuatro esquinas de la cáscara (formando el complemento de la Fig. 6.7); los bordes cortados de la cáscara son horizontales.

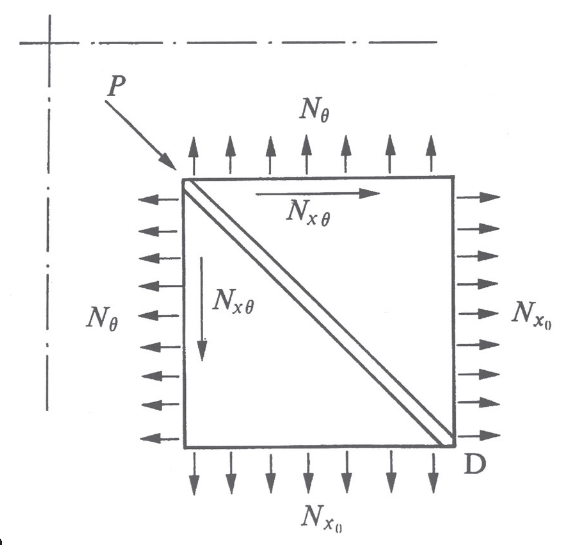


Figura 6.9

Si las fuerzas mostradas en la Fig. 6.9 se componen en el plano horizontal en la dirección paralela a la proyección del nervio, entonces

$$P\ \cos\psi + \sqrt{2}\int_0^{a(1-\mathrm{sen}\,\theta)} (N_{x\theta} - N_\theta \cos\theta)\, dx + \sqrt{2}\int_\theta^{\pi/2} (N_{x0})\, a\ d\theta = 0\ . \tag{6.5}$$

La primera integral puede evaluarse introduciendo los valores de las resultantes de tensiones de las ecuaciones (6.1) para obtener

$$P\ \cos\psi\ +\ \sqrt{2}\ wa^2\,(1-\mathrm{sen}\,\theta)^2 +\ a\sqrt{2}\ \int_\theta^{\pi/2} (N_{x0})\ d\theta\ =\ 0\ , \tag{6.6}$$

de donde

$$N_{x0} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{P\cos\psi}{a\sqrt{2}} + w\,a\,(1-\mathrm{sen}\,\theta)^2\right]. \tag{6.7}$$

Por último, si se introduce el valor de P a partir de la ecuación (6.4)

$$\frac{N_{x0}}{2wa} = \cot\theta\ (1 + 3\ \mathrm{sen}^2\theta)\,(1 - \mathrm{sen}\,\theta) - \mathrm{cosec}^2\,\theta\,(\theta + \cos\theta - 1)\ . \tag{6.8}$$

De la ecuación (6.7) se desprende que el empuje del borde N_{x0} y la fuerza del nervio P están estrechamente relacionados; la distribución de N_{x0} se ha dibujado en la Fig. 6.10.

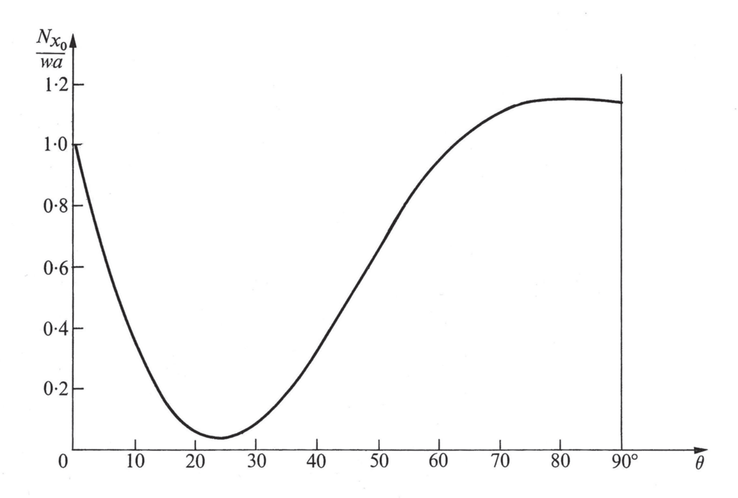


Figura 6.10

Es esta fuerza la que debe recoger el arbotante y se muestra en el alzado de la Fig. 6.4 como una resultante total de $2wa^2$; de hecho, este valor de la fuerza de contrarresto puede confirmarse evaluando la integral

$$2\int_{\theta}^{\pi/2} N_{x0}\ a\ d\theta\ .$$

La ecuación (6.7) muestra de inmediato que la integral es igual a

$$2\left[\frac{P\cos\psi}{\sqrt{2}} + w\,a^2\,(1 - \mathrm{sen}\,\theta)^2\right]_0^{\pi/2}\ ;$$

el primer término desaparece en ambos límites ($P = 0$ para $\theta = 0$ y $\cos\psi = 0$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$), y el segundo término da entonces el resultado requerido.

La expresión para N_{x0} en la ecuación (6.8) es precisamente la de la $f(\theta)$ de la ecuación (6.1) para el valor general de N_x; así, el valor de la tercera resultante de membrana puede encontrarse ahora para cualquier punto de la cáscara. Para un cálculo moderno en hormigón armado, el círculo de tensiones de Mohr permitirá dimensionar y orientar la armadura de tracción en la superficie de la cáscara. Este tipo de cálculo se utilizó a mediados de los años 1950 para la Terminal Aérea de San Luis; sin embargo, las bóvedas, que cubrían tres tramos, no abarcaban un ángulo completo de 180°, sino que se cortaban en un ángulo cercano a la sección donde debía aplicarse el empuje de contrarresto (Fig. 6.5). Se dispusieron grandes elementos de borde que distribuyen este empuje alrededor de los bordes circulares de la cáscara, y los nervios de las aristas se colocaron por el exterior en lugar de colocarse debajo de la cáscara como se haría en una bóveda gótica.

La solución de membrana desarrollada anteriormente es bastante satisfactoria para este tipo de proyectos en hormigón armado, y sirve para indicar la acción estructural primaria de cualquier bóveda. Sin embargo, cuando se aplica a la fábrica, tiene el inconveniente conocido de que se desarrollan fuerzas de tracción en las cáscaras. Además, las fuerzas de contrarresto, ciertamente necesarias para mantener la bóveda en equilibrio, deben estar distribuidas de una manera determinada alrededor de los bordes libres (como *DEF* en la Fig. 6.3) para obtener la solución de membrana. Estas distribuciones aparentemente únicas son, al igual que para la cúpula, sensibles a la forma precisa de las superficies de la cáscara; pequeñas variaciones en la geometría pueden conducir a distribuciones de fuerzas notablemente diferentes en la bóveda. Una vez que se permite que la geometría se aparte de la del cañón circular, pueden obtenerse muchas otras soluciones satisfactorias, y una vez más se buscarán soluciones para las que las superficies de empujes se limiten a estar dentro del espesor de la cáscara, y para las que, además, todas las tensiones sean de compresión.

Solución sin tracciones

El método de los cortes utilizado para la cúpula en el capítulo 5 conduce de inmediato a algunas soluciones especialmente sencillas. Por ejemplo, los cilindros de la bóveda pueden cortarse en arcos circulares independientes, que no interactúan entre sí y que, por lo tanto, se apoyan únicamente en los nervios cruceros diagonales que refuerzan las aristas. En la notación de las ecuaciones (6.1) para las resultantes de tensiones de membrana (para cáscaras *circulares*; las líneas de empuje en los arcos cortados ya no son circulares, por supuesto), tanto N_x como $N_{x\theta}$ se han hecho cero, y sólo la componente N_θ, el empuje en los arcos cortados, es distinta de cero. Por lo tanto, en la figura 6.11 no se requiere ninguna fuerza de apuntalamiento alrededor del borde libre *DEF* de la cáscara, a diferencia de la solución de membrana, pero los empujes en los arcos cortados conducen a un patrón de fuerzas (figura 6.11) que muestra de inmediato que todavía se requiere el soporte de "arbotantes".

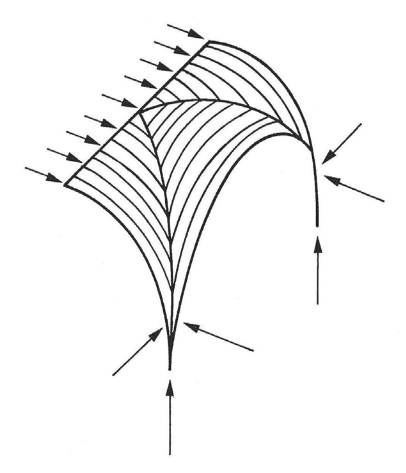


Figura 6.11

Dado que los arcos cortados soportan su propio peso, es evidente que son necesarias fuerzas de contrarresto para estabilizar los nervios diagonales. La

forma en que actúan estas fuerzas puede verse mejor, en primer lugar, reexaminando el equilibrio de la cáscara de la Fig. 6.4. Si se supone por el momento que el empuje en la clave de cada arco cortado sigue teniendo el valor de membrana, *wa* por unidad de longitud (más adelante se consideran otros valores), entonces las fuerzas de la Fig. 6.4 no se modifican; y en particular *h* sigue teniendo el valor 0,534a. El equilibrio de una porción $x \times x$ (en planta) de la cáscara (Fig. 6.12) requiere en primer lugar que

$$R = 2wa^2 \ (\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1) \ , \qquad (6.9)$$

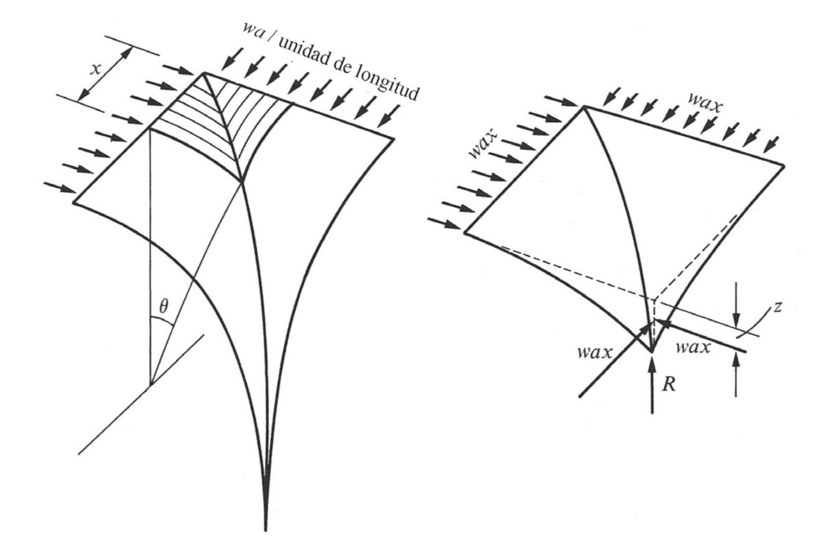


Figura 6.12

y en segundo lugar que el empuje en el nervio diagonal actúe a una distancia *z* por debajo de la parte superior de la bóveda, donde

$$z = 3a \ \left[\tfrac{1}{2}\,\theta \ (\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta - 1\right] \ , \qquad (6.10)$$

estando el propio nervio situado a una distancia $a(1-\cos\theta)$ por debajo de la parte superior de la bóveda. Obsérvese que cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $z = 0{,}534a$ como se esperaba.

En la Fig. 6.13 se muestra una vista del nervio (elíptico), junto con una gráfica del valor de *z*; es decir, la línea discontinua de la Fig. 6.13 muestra la línea de empujes del nervio necesaria para preservar el equilibrio de la bóveda en su conjunto. Nótese que esta línea de empujes se separa gradualmente de la línea media del nervio. A una distancia considerable de la coronación, un nervio de espesor finito podrá acoger la línea de empujes; pero al igual que en el caso de la bóveda de abanico, una bóveda de crucería real tendrá un relleno sólido en el conoide de la bóveda (cf. Fig. 5.13), que permite que el empuje salga de los nervios y se transmita a los arbotantes de contrarresto.

La suposición que acabamos de hacer de una magnitud de empuje uniforme en la coronación *wa* por unidad de longitud no es muy realista. Un arco muy delgado de pequeño ángulo de apertura tendrá necesariamente un empuje que se aproxima a este valor (Fig. 4.10), pero un arco de espesor finito será estable bajo un valor de empuje mucho menor. Para un cálculo del límite inferior, se tomarán los arcos cortados la Fig. 6.11 con espesores $t/a = 0{,}02$, y se supondrá que cada arco soporta su mínimo empuje posible,

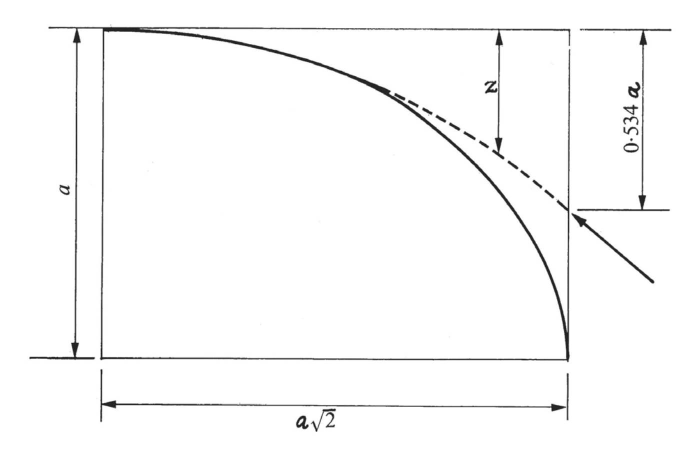


Figura 6.13

dado por los valores de la Fig. 4.12. Así, para una parte de la bóveda (Fig. 6.14) la carga de borde en la coronación no tendrá la intensidad uniforme *wa* sino que se distribuirá según la Fig. 4.12(b). Los cálculos pueden llevarse a cabo como antes, y la distancia *z* se determina (numéricamente) para cualquier valor de *x*. La línea de empujes resultante se muestra en la Fig. 6.15, y en este caso hay una desviación inmediata, en lugar de gradual, de la línea media del nervio elíptico. El valor real del empuje horizontal ha bajado de $2wa^2$ á $1{,}35wa^2$) de modo que el arbotante puede colocarse más bajo que antes.

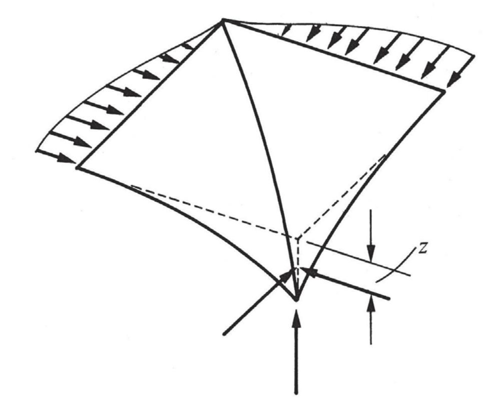


Figura 6.14

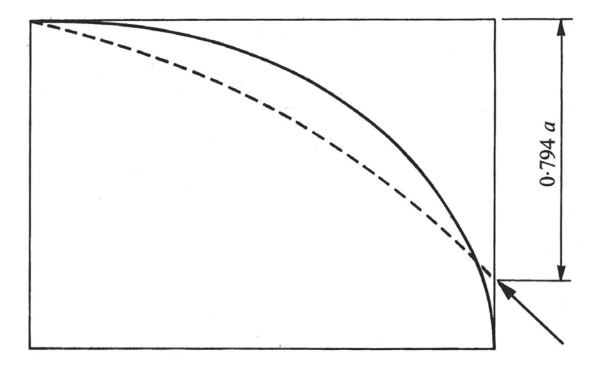


Figura 6.15

Sin embargo, quizá la característica más significativa de la figura 6.15 es que casi obliga a adoptar la forma gótica apuntada frente a la circular románica. Un arco rebajado y apuntado se adapta mejor que la elipse a la línea de empujes de la figura 6.15, en el sentido de que la línea media del nervio puede hacerse coincidir más con esa línea de empujes. Ahora bien, esta línea de empujes se calculó considerando el equilibrio de los arcos *circulares* delgados, pero no hay dificultad en el análisis de una bóveda apuntada, como la de la Fig. 6.16, aunque un cálculo numérico puede ser más conveniente que el análisis general. Como en el caso anterior, la cáscara de la bóveda se puede cortar en arcos paralelos, que no interactúan entre sí, y que dependen para su estabilidad de los nervios que soportan las intersecciones de la cáscara. Se pueden trazar líneas de empujes para cada arco individual y determinar las fuerzas de apoyo correspondientes; la figura 6.17 ilustra la condición de empuje mínimo en el apoyo para un segmento de arco. Finalmente, el equilibrio global determinará la posición necesaria del sistema exterior de contrarresto.

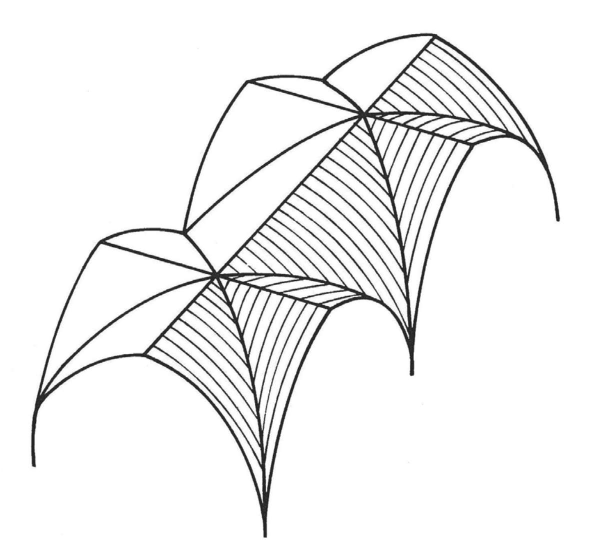


Figura 6.16

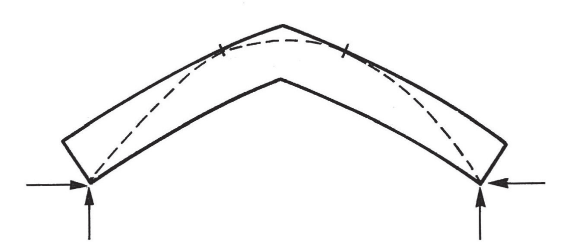


Figura 6.17

Hay que insistir en que el patrón de fuerzas resultante de este tipo de análisis es seguro, aunque el comportamiento de la estructura real pueda implicar una distribución diferente. Sin embargo, hay algunos rasgos comunes entre la solución de membrana y la solución sin tracciones para la bóveda de crucería, y quizás sea interesante concluir con breves comentarios sobre una cuestión que ha recibido cierta atención por parte de los historiadores de la arquitectura: ¿soportan o no soportan los nervios a la bóveda gótica?

En la práctica, algunos nervios parecen ser más bien pequeños, y hay casos en los que los nervios se han desprendido completamente de la bóveda, aunque ésta sigue en pie. Este tipo de evidencias ha llevado a pensar que los nervios eran dispositivos constructivos que permitían disponer fácilmente las plementerías de la bóveda, reduciendo la cantidad de encofrado, y cubriendo las uniones mal hechas de las superficies de las cáscaras en las aristas. Además, se ha considerado que el nervio era estéticamente satisfactorio, y de hecho todas estas funciones podrían considerarse como la función del nervio.

La conclusión del análisis de equilibrio de este capítulo es, sin embargo, bastante sencilla: la unión entre dos superficies de cáscara provoca una gran concentración de tensiones y es prudente reforzar la unión con un nervio. Mientras que las fuerzas debidas al peso propio se difunden a través de las propias superficies de la cáscara, se concentran fuertemente en las uniones, y los nervios surgen como los miembros estructurales efectivos que soportan toda la bóveda. Se ha visto que si se considera que el nervio tiene

unas dimensiones $t \times t$, donde t es el espesor de la bóveda, la tensión en el nervio será un orden de magnitud superior a la de las partes vecinas de la cáscara. Sin embargo, incluso este nivel de tensión, aunque alto, estará muy por debajo de la resistencia de rotura a compresión del material. Si se construye una bóveda sin nervios, o con nervios que posteriormente se caen, es posible que las intersecciones diagonales de las cáscaras sean lo suficientemente regulares, y el mortero lo suficientemente resistente, como para que no se produzca el colapso de la bóveda. En este caso, la bóveda habrá tenido éxito, por así decirlo, en el intento de construir sus propios nervios, visibles, al menos, para el ojo del ingeniero estructural.

Índice alfabético

TEXTOS DE TEORÍA E HISTORIA DE LAS CONSTRUCCIONES
Colección dirigida por Santiago Huerta

A. Buchanan et al. *Willis. Science, Techn., Architecture*
A. Choisy. *El arte de construir en Roma*
A. Choisy. *El arte de construir en Bizancio*
A. Choisy. *El arte de construir en Egipto*
A. Choisy. *Historia de la arquitectura* (en preparación)
P. Fuentes, I. Wouters. *Brick vaults and Beyond*
I. J. Gil Crespo. (Ed.). *Construcción fortificada*
J. Girón, S. Huerta. *Choisy. L'architecture, l'art de bâtir*
R. Guastavino. *La construcción cohesiva*
J. Heyman. *Análisis de estructuras: enfoque histórico*
J. Heyman. *El arco de fábrica*
J. Heyman. *El esqueleto de piedra*
J. Heyman. *Equilibrio de cáscaras*
J. Heyman. *Geometry& Mechanics of Historic Structures*
J. Heyman. *La ciencia de las estructuras*
J. Heyman. *Teoría básica de estructuras*
J. Heyman. *Estructuras de fábrica.* 2 vols.
J. Heyman. *Vigas y pórticos*
S. Huerta. *Arcos, bóvedas y cúpulas*
S. Huerta (Ed.). *Bóvedas de Guastavino en América*
S. Huerta (Ed.). *History of the Theory of Structures*
J. Ibáñez (Ed.). *Trazas y modelos góticos (ss. XIII-XVI)*
J. Ibáñez, B. Alonso. *El cimborrio en la arquit. hispánica*
JM. Molero et al.(Ed). *Construcción fortificada medieval*
J. Monasterio. *Empuje de las bóvedas* (en preparación)
J.R. Perronet. *Construcción de puentes en el s. XVIII*
H. Straub. *Historia de la ingeniería* (en preparación)
G. Street. *La arquitectura gótica en España*
H. Thunnissen. *Bóvedas: construcción y empleo*
A. Truñó. *Construcción de bóvedas tabicadas*
E. Viollet-le-Duc. *La construcción medieval*
R. Willis. *Construcción de bóvedas en la Edad Media*

ACTAS CONGRESOS HISTORIA DE LA CONSTRUCCIÓN
I-VIII Congr. Nac. Historia de la Construcción (1996, 1998, 2000, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013)
IX Con.Nac./I Int. Hisp.-Amer. Hist. Construcción (2015)
X Con.Nac./II Int. Hisp.-Amer. Hist. Construcción (2017)
III Congr.Int. Hisp-Amer. Hist. Construcción (2019)
XI Cong. Nac. Historia de la Construcción (2019)
Proc. 1st Int. Congr. on Construction History (2003)
II Jornadas Construcción Fortificada (2016)

ISBN 978-84-9728-598-8
9 788497 285988